Sequuntur quaedam annotationes quae poni non potuerunt in textu, Annotatae a viro summo acumine ingenii praedito, Dno Guillielmo Vinbrerio[?] Parisiis. Anno Dni 1503: die 16 mensis Augusti

Et primo folio 2 definitione 9

Quando

[Defi]nitio 9

Angulus rectilineus non opponitur plano sed est altera species alterius divisionis ut si mediatores alios angulos efficit a duabus rectis: Alios a duabus curvis. Alios a curva et recta porro vocare rectilineos curvilineos mixtos Alij anguli aliqui [illegible] rectis lineis sunt quasi [illegible] autem Memineris Rectilineum etiam continere obtusum et acutum, quemadmodum continet rectum.

Altera parte

Defin. 31

Quando erat quadratum aequilaterum licet tamen quantam lineam dedit et ex ea parte rectam lineam oppositam longiorem producendo tandem quantam lineam effingere. Sic ex quadrato aequilatero formatur quadrangulum altera parte longius: Ac quemadmodum ante anguli quatuor fuerant recti, Ita etiam remanent semper. Memineris vocabulum altera parte longius sonare quidquam generaliter, quam specie ei tribuitur. videretur enim assignari posse [illegible] nisi debet significationem completam.

Parallelae rectae

def. 35

Lineae descriptae sunt quae concurrere ad angulos efficiendos. Parallellae vero et si non concurrunt cum sint parallelae, tamen sunt magno usui nempe ad demonstrationem proprietatem triangulorum quadrangula parallelogramma aliaque ad certas figuras. Sunt ergo semper aeque a se distant quantumcumque produci possint in infinitum recto ductu semper aeque a se distabunt Itaque nunquam concurrent.

[I]mpone tres lineas a, b, c, si a, est aequalis c, et b, aequalis c, duae lineae a, b, sunt aequales

Probatio definitionis trianguli scilicet omne triangulum habere tres angulos pares duobus rectis

Propositio est 32

Demonstratio accurata. Quicquid habet tria latera clausa habet tres angulos aequales duobus rectis. Omne triangulum habet tria latera clausa: Ergo omne triangulum habet etc. Minor est propositio immediata constans subiecto et definitione. Maior demonstratur: Quicquid habet tres angulos aequales illis duobus quos recta supra rectam cadens hinc inde efficit, illud habet tres angulos aequales duobus rectis. Quicquid clauditur tribus lateribus est huiusmodi. Ergo quicquid clauditur etc. Maior probatur per primam communem sententiam. Quia si hoc comparentur et utrumque duorum sit seorsim sumptum sit aequale tertio: illa duo sunt sibi invicem aequalia. Atqui possunt comparari duo recti cum duobus quos recta supra rectam hinc inde efficit: et illi duo quos recta supra rectam efficit possunt comparari cum tribus interioribus trianguli. Ergo si semper sit aequalitas tres interiores sunt aequales duobus rectis. Probatur vero quod illi tres interiores sunt aequales illis duobus quos recta supra rectam efficit. Nam producto uno latere cuiusvis trianguli, non solum videbis tres angulos trianguli, sed etiam lineam quae in lineam cadat. Tunc unus angulus est inclusus in triangulo, et is quidem est semper aequalis sibi ipsi. Atqui alter qui est externus est aequalis aliis duobus simul sumptis. Ergo illi duo anguli quos recta supra rectam efficit sunt aequales tribus angulis trianguli. Maior patet ex istis: Minor vero est pars prima huius propositionis, quae est probata. ergo etc.

Aequas et parallelos propositio 33

Usus parallelorum non solum pertinet ad triangula: sed etiam ad quadrangula, ad hexagona, octogona et caetera quae habent latera innumera pari. Itaque hoc est quasi principium componendi quadranguli parallelogrammi: si duae lineae supponantur esse parallelae et aequales in magnitudine, ipsae vero in extremitatibus claudantur per duas rectas, illae duae rectae claudentes erunt etiam parallelae: unde fit [illegible] rectangulum parallelogrammum sive quadratum: sive altera parte longius, sive rhombus sive rhomboides: probatur hoc. Facto quadrangulo si ducatur diametrum ab angulo ad angulum remotissimum ita  Nam fiunt ex quadrangulo divisis duo triangula propter diametrum. Iam potest probari illa duo sibi invicem esse aequalia. Nam basis utriusque est diametrus: iam duae lineae parallelae erunt aequales ex hypothesi: Ergo duo latera unius sunt aequalia duobus lateribus alterius: Atqui praeterea is unus angulus est aequalis uni angulo. Quia diametros incidit in duas parallelas ut faciat angulos aequales. Ergo et tertium latus unius erit aequale tertio lateri alterius per demonstrationem quartam: Illa vero duo tertia latera sunt lineae contingentes: Ergo aequales sunt.

Jay receu de Barthelemy de Blanca la somme de cotte et pour le semestre de la taille basse que ceux bourgeois qui a commencé le 15 may dernier & finira le 15 novemb. prochain

Fait a Castel ce 24 Juillet 1660

Orontij Finæi Delphinatis, REGII MATHEMAticarum Lutetiæ professoris,

In ſex priores libros Geometricorum elementorum Euclidis Megarenſis demonſtrationes, recèns auctæ,& emendatæ: vnà cum ipſius Euclidis textu Græco, & interpretatione Latina Bartholomęi Zamberti Veneti. Omnia ad fidem geometricam, per eundem Orontium recognita.

Aeditio tertia.



LVTETIAE PARISIORVM,

Apud Reginaldum Calderium.

1551.

vireſcit uulnere uirtus.

Christianissimo ac

POTENTISSIMO GALLIARVM Regi, Francisco huius nominis primo, Orontius Finæus Delphinas, S. D.

DVM celebres illas & fidissimas artes, Francisce Rex inuictissime, quæ solæ Mathematicæ, hoc est, disciplinę meruerunt adpellari, sub tuo fœlici profiterer nomine: raros admodùm offendi (etiam in numerosa auditorum multitudine) qui satis fido ac liberali animo, tam vtile ac iucundum philosophandi genus, à limine (vt aiunt) salutare, ne dicam ad illius penetralia, penitioráque secreta, peruenire dignarentur. Cuius adeò miseræ ac deplorandæ infœlicitatis radicem, ex eo maximè pullulare vel facilè percepi: quòd siue inclementia temporis, siue parentum & præceptorum incuria, Geometriæ nusquàm prægustauerint elemēta, sine quorum prævia, ac exacta cognitione, omnis prorsus, nedum Mathematica, negatur philosophia. Perscrutatur enim Geometria continuæ, & prout immobilis est, quantitatis accidentia: nempe magnitudinum, & figurarum rationes, affectiones item, positionésque diuersas: multiformia ipsarum discrimina subtili admodum examine discutiendo. Exordium, præterea sumit, à per sese, & vulgo notis principijs, & potissimis Dialectices innixa præceptis, ac collecta syllogismis, ad prima demonstrationum insurgit elemēta. à quibus per mediorum ordinem discurrendo, atque simplicia cōpositis, & cōposita simplicibus comparādo, progreditur ad vltima: ad propria tādē singula resoluendo principia. Quāquàm insuper circa intellectilia & abstracta, quemadmodum & diuina versetur philosophia: sensilia tamen & ipsi materiæ subiecta, veluti physica ratiocinatio, simul attingere comperitur. Et proinde fit, vt nulla disciplina certior existat Geometria, vel quæ illam antiquitatis dignitate præcellat. Nulla etiā quæ vires ingenij magis foueat, augeat, locupletétque: vel quę ingenium ipsum ad puriora studia, omnímque

úmque ingenuatum adinuentionum excogitationem, adeò facile reddat, ac ſuapte natura propenſum. Adde quòd vſui, & commodo generis humani plurimùm cedit. Hinc præclara illa & toti Orbi decora liberalium artium facultas, cæterarũ mater & alumna, ad veterum philoſophorum imitationem, prudentiſſima ſanciuit institutione: ne quiſpiã in doctorũ, ſeu (vt vocãt) magiſtrorum admittatur ordinem, ni cum cæteris philoſophici diſcuſſus authoribus, ſex priores libros geometricorum elementorum Euclidis ſaltem audiuerit. quaſi ignoratis Geometriæ rudimentis, ad cæteras diſciplinas præcluſa videatur eſſe via. Cuius rei veſtigia, Pariſienſis adhuc obſeruat academia. Qui enĩ ad lauream aſpirant philoſophicam, iureiurando profitentur arctiſſimo, ſeſe prænominatos Euclidis libros audiuiſſe. An verò illius elementa, multis ab hinc annis, vſque ad noſtra viderint, ne dicam intellexerint, tempora (paucis forſitã exceptis, quos æquus amauit Iuppiter) non auſim honeſtè conſteri. Nouerunt enim ſinguli, etiam exteri, quibus deliramentis, non modò fœcundiſſima iuuenum ingenia hactenus torſerint, ac penè dixerĩ deprauarint pſeudophiloſophi: verumetiam omnem bonam extinxerint eruditionẽ. Redit tamen ſuus ſingulis honos, ſuúq; dignitas: & in priſtinum illum diſciplinarũ ſplendorem (reiectis barbaris, ac ſophiſticis nugis) paulatim cũcta reduci cõſpicim⁹. Idque tuo in primis fauore, ac liberali ſuccurrente munificẽtia, Princeps humaniſſime: qui primus inter maiores tuos, non ſine magna tui nominis ac dignitatis propagatione, & incomparabili Reipub. commodo, bonarum literarum ſtudia fouere cœpiſti, et publicis augere profeſſoribus. Inter quos, me liberalium Mathematicarum interpretem in primis inſtituiſti: & præter decretũ ſtipendium, laborum meorum rationem te tandem habiturum ſæpius es pollicitus. Vt igitur pro mea virili parte, tum erga munificentiam tuam, tum erga ipſam Rempub. debito fungar officio, & præter publicas lectiones, aliquod hominis veſtigium, in fidele tuæ liberalitatis & clementiæ teſtimonium, poſteris relinquam, vtque viam ad grauiota iis ſimul aperiam, qui mathematici fieri, hoc eſt, aliquid ſcire deſiderant: conſcripſeram nuper in ſex (quos paulo antè dixi) libros Euclidis, commentaria admodũ utilia, clariſſimáſque propoſitionum demonſtrationes, & ſub

nomine

nomine, auspicióque tuo fœlicissimo tandem ædideram. Quæ à studiosa iuuentute, non sine magno eruditionis incremento, sic auidè recepta fuerunt: vt iam distributa sint secūdæ æditionis exēplaria. Quapropter ipsas demonstrationes denuò recognoui & emendaui, atque ad eam perduxi fidelitatis rationem, vt omni vel accessione, vel detractione, in posterum carere facilè possint. Quas rursum sub tuo nomine & auspicio, in publicum redire cōcessi. Reliquum est igitur, vt hosce labores nostros liberaliter suscipere: & tui Orontij tandem meminisse non graueris. Vale Regum decus, & literarium refugium vnicum. Ex Lutetia Parisiorum, mense Octobri, Anno Christi M. D. XXXVI: Et rursus mense Augusto, M. D. XLIIII. Atque rursum mense Octobri, M. D. LI.

IDEM ORONTIVS, AD CANdidum quemque, ac studiosum Lectorem.

Recognouimus tandem, candide ac studiose Lector, & non sine magna rerum geometricarum accessione adauximus & emendauimus, æditas superioribus annis in sex priores libros elementorum Euclidis, disciplinarũ omnium facilè ianitoris, demonstrationes. Vnà cum *ipsius Euclidis contextu græco suis locis inserto, & interpretatione Latina Bartholomæi Zamberti Veneti: quam vbi geometricum visa est offendere sensum, ea qua decet modestia fideliter emendauimus. Inprimis itaque diffinitiones ipsas, quæ durioris, quàm iuuenum captus exposceret, plerunque videbantur interpretationis (potissimum libri quinti) qua potuimus elucidauimus facilitate, atque cætera principiorum genera, à quibus vniuersa problematum atque theorematũ multitudo consurgit, in suam redegimus harmoniam. Ipsorum porrò theorematum atque problematũ subtiles difficilesque demonstrationes, tali artificio, adeòque ordinato ac facili discursu conscripsimus, & conuincentibus probauimus syllogismis (multis tum in melius commutatis, tum recèns adinuentis: nullisque, præter ea quæ in ipso continentur Euclide, subrogatis principiis) vt nemo futurus sit, qui legẽdo simul non valeat intelligere, quique minimum addere verbum absque temeritate, aut detrahere sine iactura possit. Adde quòd ipsarum demonstrationũ schemata sine figuras, ad rigorem artis seu literæ propria manu depinximus: quò satis ex omni parte huic labori faceremus. Primo itaq; libro describũtur triãgula, lineæ, ãguli, paralleli: necnon quadrata & parallelogramma, tum inuicem tum ipsis comparata triangulis. secundo, gnomon atque rectangulum diffinitur parallelogrammum: linearum insuper tum sectarum, tum coniunctarum adinuicẽ potestates: hoc est, ex ipsis lineis, ac earundem segmentis resultantium quadratorum & rectilineorũ qualitates edocẽtur. Tertio autẽ, circulorũ perscrutãtur inspectiones, atque rectarũ in circulo subtensarũ, & ipsorum angulorũ tum ad centrũ tũ ad circuli circunferentiam consistentium discrimina. Quarto porrò libro, ipsius trianguli, dein regularium aliquod figurarum inscriptiones, atque circunscriptiones cum ipso ostenduntur circulo. Quinto, magnitudinum rationes atque proportiones (quæ totius artis geometricæ videntur esse thesaurus) in vniuersum discutiuntur. sexto denique libro, post diffinitam rationum compositionem, linearum*

proportion.lia

proportionalium inuentiones, rationes item atque proportiones figurarum, mirabili resoluuntur artificio. Quæ quidem omnia syllogismis, tum à causis, tum ab inspectionibus sumptis (quæ fidem efficere possunt) suo demonstrantur ordine. Incepit igitur Euclides à triangulis, & angulis, atque lineis rectis: propterea quòd rectilinearum figurarum prima est trilatera, in quam cæteræ rectilineæ figuræ resoluuntur. Penes insuper laterum & angulorum diuersam habitudinem, earundem rectilinearum figurarum attenduntur considerantur ve discrimina. Et proinde liber primus, vniuersalior est secundo, secundus tertio, tertius quarto: & deinceps ita de cæteris. Nec alienum velim habeas iudicium, de proprijs singulorum librorum diffinitionibus. Hos autem sex priores libros, ad continuam spectantes quãtitatem, seorsum de industria collibuit exponere. Nempe in gratiam tum auditorum nostrorum, atque professorum artium liberalium, nostræ potissimum Academiæ Parisiensis, qui eosdem libros suis tenentur interpretari discipulis: tum etiam ob ipsorum discipulorum non aspernandã vtilitatem. Poterunt siquidem eorundem sex librorum adminiculo, viam sibi ad vniuersam parare philosophiam: præcipuè Aristotelicam, quæ geometricum præsupponere videtur auditorem. hinc fit, vt ijs qui Geometriam ignorãt, subobscurus difficilisque videatur Aristoteles. Quantum igitur publicæ studentiũ consuluerimus vtilitati, quàm longè præterea cæteros omnes hac in parte superauerimus: nõ facilè persuadebitur ambitiosis illis & vanissimis rabulis ac perniciosissimis impostoribus, qui dum nihil agunt boni, sed vitam protrahunt parasiticam, suum de omnibus impudenter audent proferre iudicium. sed tu æquissime ac humanissime Lector, qui iudicio, doctrina & eruditione polles, & omnia boni & æqui semper consulere nosti, nec ignoras quàm pulchrum & quàm decorũ sit, pro concessa dexteritate, cæteros iuuare mortales, dum perlegeris, & perpenderis singula, poteris apud te tandem iudicare. Quòd si hunc laborem nostrum, tibi pergratũ (vt optamus & speramus) futurũ acceperimus: habebis in reliquos omnes ipsius Euclidis libros nõ aspernãda quæ tibi parauimus Cõmẽtaria. Vale igitur rursum fœliciter: & Christianissimo Francorum Regi, mecœnati nostro clementissimo (cuius fauore & auxilio hæc tibi communicamus) vitæ inprimis, dein rerum omnium fœlicissimum imprecare successum. Lutetiæ Parisiorum mense Octobri. Anno Christi saluatoris M. D. L I.

Cur hos sex libros seorsũ ædiderit Orõtius.

IDEM ORONTIVS, IN INVIDVM.

Omniculose Glis, caput papauere
Oppletum aggresti, trunce, stipes Aethiops:
Vt mortui, cuius iacet corpus pigrum,
Fortasse vel si paululum vigilaueris,
Impendis inguini, lusibus, gutturi:
Noli inuidere vigilias longas bonis,
Te non adurat docta lucubratio.
Non inuideo tot vicia, non somnum tibi.
Volito per ora, iacebis in silentio.

Antonius Mizaldus MONSLVCIANVS Lectori.

Ornatus Euclides suis coloribus,
Pictore prodit diligente, sedulò
Posthac legendus: quem Finæus reddidit
Maiore dignum protinus spectaculo:
Manabit illi certa laus, & præmium,
Ni prorsus obstet temporum vecordia:
Pollêre raris haud parum est sic artibus:
Illis fauêre, ac has fouêre Regium.

Orontij Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, In sex priores libros elementorum Euclidis, Demõstrationes: recens auctæ & emendatæ.

¶Principiorum libri primi interpretatio.

Receptum est ab omnibus, unamquanque disciplinam propria sibi uendicare principia: quæ & si nulla prorsus uideantur indigere probatione, ex ipsis tamen sane quam intellectis principijs, ad ea quæ eadem consequuntur principia, deuenire uel facile contingit. Idcirco generalem principiorum geometricorum elucidationem, protheoriámue in sex priores libros geometricorum elementorum Euclidis Megarensis (quos in gratiam studiosorum omnium suscepimus interpretandos) præmittere: atque intellectualem illam magnitudinum, & figurarũ contemplationẽ (prius, quàm ad propositionũ ostensionem deueniamus) rudioribus geometricarum speculationum tyrunculis aperire, non duximus importunum. ¶Triplicem itaque principiorum offendimus ordinem: utpote, diffinitiones, terminorum naturam exprimentes: postulata, ex ipsis collecta diffinitionibus: & effata, seu communes sententias, quæ dicuntur axiomata. In primis ergo diffinitiones, dein reliqua, suo declarabimus ordine. ¶Animaduertendum est igitur, subiectum ipsius Geometriæ fore magnitudinẽ, a numero quidem & materia seorsum abstractam. Magnitudinis autem, triplex assignatur dimensio. Aut enim magnitudo longa tantum imaginatur, ut linea: aut longa & lata, ueluti superficies: uel denique longa & lata, simulque profunda siue crassa, hoc est, solida siue corporea, abstrahitur. Quorum omnium mediatum uel immediatum principium, punctum (alias signum) esse dicitur. Fingitur enim magnitudo per continuam suiipsius diuisionem (quanquam in semper diuisibilia naturaliter distribuatur) deuenire tandem ad partem minimam, quæ uidelicet amplius diuidi non possit, ac si foret omni dimensione priuata: instar quidem unitatis in discreta quantitate. Vt quemadmodum ex unitatis multiplicatione, omnis conficitur numerus: haud dissimiliter ex huiuscemodi parte, uel indiuisibili nota, per abstractum seu transsumptiuum eiusdem notulæ motum, omnem effingamus oriri seu produci magnitudinem. Hanc itaque magnitudinis partem minimam, siue notulam indiuisibilem seorsum abstractam, punctum adpellamus: & ab Euclide ita primùm describitur,

Cuiuslibet disciplinæ propria recipienda fore principia.

Triplex ordo principiorũ geometricorũ.

Geometriæ subiectum.

Triplex in magnitudine dimensio.

Punctũ omnis magnitudinis principium.

Puncti cũ unitate coparatio.

¶ De puncto, linea, atque superficie, Diffinitiones.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐδέν. *Punctum.*

Punctum est, cuius pars nulla.

Id est, quod abstractum à continuo, uelut ipsius continui pars minima, omni dimensione priuatum imaginatur. ¶Ex cuius quidem puncti abstracto defluxu, per infinitam suipsius multiplicationem, longitudo dimensionum primaria conficitur. quæ linea uocitatur, in hunc diffinita modum.

Vt linea ex puncto describatur.

¶Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

Linea verò, est longitudo latitudinis expers. 2

Hoc est, latitudine priuata. Cum enim punctum omni careat dimensione: suo fluxu, seu transsumptiuo motu, causat tantummodo longitudinem.

¶Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

Lineæ autem limites, sunt puncta. 3

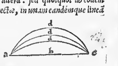
Incipit enim à puncto, & ex infinitis conficitur punctis, in punctúmque terminatur. Omnis porrò linea, uel recta, uel obliqua uenit imaginanda.

¶Εὐθεῖα γραμμὴ, ἐστὶν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Recta linea est, quæ ex æquali sua interiacet puncta. 4

Vtpote, quæ a puncto in punctum breuissime ducitur, ipsa terminatiua puncta intermedijs æquali positione connectens: uti subscripta a b c, linea repræsentat. Cùm igitur à dato puncto, in datum quodcunque punctum unica sit breuissima uia: fit, ut nulla recta linea rectior detur altera: sed quotquot ab eodem puncto ad idem punctum producentur lineæ rectæ, in unam eandémque lineã rectam coincidant. secus est de obliqua: quæ per contrariam ipsius rectæ diffinitionem facilè describitur. nam ab eodem puncto ad idẽ punctum, infinitæ producuntur obliquæ lineæ quæ circunferentiarũ portiones adpellantur: dantúrque obliquis obliquiores. Veluti, quæ ab eodem puncto a, ad punctum c, per ipsum d, protrahuntur, ostendunt. ¶Ex lineæ autem imaginario fluxu, ac si succedentium ad inuicem linearum uestigium relinqueret, latitudo dimensionum altera respondenter acquiritur, describitúrque superficies.

Recta linea non datur rectior.



Obliquarũ linearum infinita diuersitas.

Superficiei abstractiua descriptio.

¶Ἐπιφάνεια ἐστὶν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Superficies est, quæ longitudinẽ, latitudinémque tantũ habet. 5

Quæ cùm exordiatur a linea, & ipsius lineæ terminatiua puncta, ad motum eiusdem, rectam uel obliquam lineam describant, in eadémque linea mota quiescat ipsa superficies: relinquitur euidens, quòd superficiem terminant lineæ. hinc subiungit Euclides,

¶Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

Superficiei autem extrema sunt lineæ. 6

Porrò cùm linea, ad descriptionem mota superficiei, recta fuerit, atque in longum lineæ rectæ uniformiter, breuissiméque traducta: fit superficies, quæ plana dicitur, & in hunc diffinitur modum.

¶Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά, ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις ἔχει.

Plana superficies est, quæ ex ęquali suas interiacet lineas. 7

Id est,



Id est, quæ per totam rectam in eam quaqua-uersum accommodatur, nullo prorsus inflexa curuamine: ueluti obiecta superficies e,f.

Hinc curuæ superficiei diffinitio, per contrariā elicitur imaginationem: quæ ex ea parte qua circumflectitur, concaua: forinsecus autem, curua siue conuexa nominatur. quemadmodum tibi repræsentat figura g,h.



Curua superficies.



¶Ex superficiei denique fluxu, solidū siue corpus trina dimensione, utpote longitudine, latitudine atque profunditate contentum, abstractiuè describitur. Quod uel unica tantummodò superficie, uti sphæra k: pluribúsue superficiebus, ut cubum l, terminatur. Sed de his in posterioribus libris ipsius Euclidis tractandum. Solidum porrò motum, nu'lam uidetur acquirere dimensionem: sed ipsas dimensiones augmentat, immutátque figuram. Igitur pro linearum atque superficierum uarietate, diuersóque earundem motu, seu abstracto defluxu: uaria, & penè infinita tum planorum, tum etiam solidorum, hoc est superficierum & corporum abstrahitur multitudo, pro limitum & angulorum uarietate, diuersis expressa nominibus.

Solidorū origo.

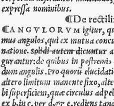
Unde superficierum & corporum tanta diuersitas.

¶De rectilineis angulis.

¶ANGVLORVM *igitur, quidam plani: quidam uerò solidi. Planos uocitamus angulos, qui ex mutua concurrentium adinuicem linearum causantur inclinatione. Solidi autem dicuntur anguli, qui ex planorum angulorū concursu figurantur: de quibus in postremis elementorū libris. Nunc itaque de planis tractādum angulis. Pro quorū elucidatione animaduertendum est, quoties linea recta, altero limitum manente fixo, altero autem moto, complete circunducitur: describi superficiem, quæ circulus adpellatur. utpote, si a b, recta, immoto puncto a, ex b, in c, per d, & e, rediens tandem in b, circum idem punctum a, complete reuoluatur: describens planum circulare b c d e. Nam punctum b, hoc modo circunductum, lineam efficit orbicularem, quæ circunferentia dicitur: & immotum punctum a, medium, siue centrum eiusdem uocatur circuli. Hinc orta est subscripta circuli, & in ordine decimaquinta diffinitio. Prius quàm autem eiuscemodi linea uniuersum compleuerit orbem, diuersas cum prima & recta linea facit inclinationes, nusquam ab immoto recedendo puncto. Hæc igitur linearum super eodem plano sese ita contingentium inclinatio mutua, uel inclinationis habitudo (ut linearum a b, & a, e, uel a c, & a d,) & non in directū constitutarum, hoc est, unam eandémque rectam lineam minimè efficientium (cuiusmodi sunt a b, & a d, uel a c, & a e) planus uocitatur angulus: qui ab*

Angulus. Planus, Solidus.

Angulorum origo notanda.



ipso Euclide, hoc modo consequenter diffinitur.

Ἐπίπεδος ἡ γωνία, ἐστιν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Planus angulus, est duarum linearum in plano sese tangentiũ, & non in directo iacentium, ad alterutram inclinatio.

Hæc autem inclinatio de rectis lineis potissimum uenit intelligenda: tales enĩ anguli in his primis sex libris geometricorum elementorum præcipue considerãtur. Hinc dicit Euclides,

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

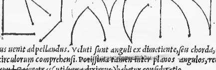
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint rectilineus angulus nuncupatur.

Planorũ angulorũ diuersitas.

Quòd si eædem lineæ datum efficientes angulum fuerint obliquæ, siue curuæ curuilineus dicetur angulus. quales sunt, qui a circunferentiarum causantur interse ctionibus: si autem ex recta & curua angulus ipse conficiatur: is mixtus uenit adpellandus.

ANGVLI:

Rectilinei. Curuilinei. Mixti.



Veluti sunt anguli ex dimetiente, seu chorda, & arcubus circulorum comprehensi. Potissima tamen inter planos angulos, rectilineorum apud Geometras (uti supra diximus) habetur consideratio.

Penes quid rectilineorum angulorum attendenda magnitudo.

Angulus. Rectus. Acutus. Obtusus.

Cuiuslibet igitur anguli plani rectilinei magnitudo siue quantitas, dicitur arcus circuli ab ipsis lineis rectis datum efficientibus angulum comprehensus: circuli: inquam, cuius centrum ad concursum dictarum linearum imaginatur, & qui ad completam minoris earundem linearum reuolutionem describitur. Si datæ itaque lineæ rectæ angulum continentes, quadrantem adamussim comprehẽdant ipsius circuli: huiusmodi angulus rectus dicitur. Si uerò arcum includant quadrante minorem: acutus. Quoties autem idem arcus, quadrantem exuperauerit circuli: datus angulus nominatur obtusus. Quod ex ipso facile colligitur Euclide, cùm dicit,

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα, εὐθεῖα κάθετος, καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Anguli recti definitio.

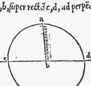
Cùm verò recta linea super rectam consistens lineam, vtrobique angulos adinuicem æquales fecerit: rectus est vterque æqualium

10

æqualium angulorum. Et quæ superstat recta linea perpendicularis vocitatur, super quã steterit.

Linea perpẽdicularis.

Cuiusmodi sunt anguli a,b,c,& a, b,d, a recta a,b, super rectã c,d, ad perpẽdiculũ incidẽte, causati. Est eni recta c,d, in quã cadit a,b, dimeties circuli, à circunducta b,a, circa punctum b, descripti. Nec possunt ijdem anguli a,b,c,& a,b,d, adinuicem æquales esse, quin uterque quadrantem includat circuli: & a,b, recta, super rectam c,d, perpẽdicularis existat. Ex quibus infert consequenter, obtusi & acuti anguli diffinitiones.



Ἀμβλεῖα γωνία ἐστι, ἡ μείζων ὀρθῆς.

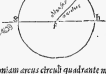
11 Obtusus angulus, maior est recto.

Vt angulus e,f,g, includens arcum e,g, quadrante maiorem, descripti circa punctum f, circuli. Dicitur autem idem angulus e,f,g, obtusus: quoniam e,f, & f,g, lineæ rectæ, obtusam extrinsecus faciunt inclinationem.

Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

12 Acutus verò, minor est recto.

Veluti angulus e,f,h: cuius arcus e, h, eodem circuli quadrante minor est. Vnde fit, ut e,f, & f,h, rectarum linearum inclinatio, in acutam conueniat habitudinem. Quanto igitur obtusus angulus e,f,g, maior extiterit, tanto minor erit acutus e, f, h: ipsa porrò linea e, f, incidens in g h, uocitetur. Et quoniam eiusdem circuli quadrantes sunt adinuicem æquales: nõ datur propterea rectus angulus, altero rectior angulo, secus de obtusis, uel acutis angulis: quoniam arcus circuli quadrante maiores, eodẽmue quadrante minores, uarij sunt, atque infiniti. Linearum itaque maior aut minor longitudo, quemadmodum nec magnitudo circuli, angulum nõ immutat: hoc est, neque maiorem, neque minorem eundem efficit angulum.



Cur omnes anguli recti inuicẽ æquales.

Acutorũ & obtusorũ angulorum diuersitas.

Linearũ quãtitas angulũ non immutat

De termino & figura.

CVM autem omnis magnitudo finita sit, & terminata: diffinit consequenter Euclides ipsius magnitudinis terminum, in hunc qui sequitur modum.

Ὅρος ἐστί, ὅ τινός ἐστι πέρας.

13 Terminus est, quod cuiusque finis est.

Vt pote, punctum ipsius lineæ, linea superficiei, superficies denique solidi: quẽadmodum ex eorundem abstractiua descriptione facilè colligitur. Itaque figuræ tam planæ, quàm etiam solidæ hæc colligitur diffinitio.

Σχῆμα ἐστί, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

14 Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis cõprehẽditur, sub aliquo quidem, ut planum circulare, uel solidũ sphæricũ: sub aliquibus uerò,

ut triangulum uel quadrangulũ inter planas, & cubũ, aut pyramis inter solidas & quæ sunt eiuscemodi. Sed de planis figuris, atque de lineis & angulis in eodẽ plano constitutis, bis sex prioribus libris determinandum.

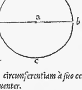
De circulo, eiúsque partibus.

INTER Figuras, quæ planæ uocantur ea dicitur esse simplicissima, quæ unico comprehenditur termino: cuiusmodi uidetur esse circulus. Hunc itaque primùm diffinit Euclides,

Κύκλος ἐςὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Circulus, est figura plana, vna linea contenta, quæ circunferẽtia adpellatur: ad quam, ab vno puncto introrsum medio existẽte, omnes prodeuntes lineæ, in ipsius circuli circunferentiam incidentes, adinuicem sunt æquales. 15

Hæc diffinitio, ex data nuper (cùm de planis loqueremur angulis) abstractiua circuli descriptione fit manifesta. Cùm enim a b, recta linea data, circum a, punctum completè reuoluitur: punctũ b, suo motu circunferentiam causat, & immotum punctum a, in circuli centrum permutatur. Hoc itaque circuli centrum, secundum longitudinẽ ipsius a b, rectæ lineæ datæ, ex omni parte distabit à circunferentia. Ex quo necessium est, omnes rectas lineas, ab ipsius circuli cẽtro in circunferentiam eiusdem incidentes, fore eidem a, b, (ex qua circulus describitur) atque adinuicem æquales. Hoc est, eiusdem circuli circunferentiam à suo centro æqualiter undiquaque distare. Hinc dicit consequenter.



Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

Centrum verò ipsius circuli, punctum adpellatur. 16

De puncto medio uelim intelligas: ut punctum a, in obiecta circuli figura b, c d e. Lineæ nanque limites sunt puncta: quorum immotum (circa quod uidelicet alterum in circuli descriptione circunducitur) in medio permanet, & centrũ efficitur circuli.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου, ἐςὶν εὐθεῖα τις, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, τερατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Dimetiens circuli, est recta quædam linea per centrum acta, & ex vtraque parte in circuli circunferentiam terminata, quæ circulum bifariam dispescit. 17

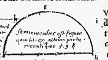
Huiusmodi est linea b d, supra scripti circuli b c d e, per a, centrum utrinque producta:

productæ: & quæcunque illi similis. Dimetiens enim, siue diameter, propriè circulorum esse uidetur: diagonius autem, rectilinearum figurarum: axis uerò, solidorum, & propriè ipsius sphæræ.

Dimetientis à diagonio & axe differentia.

Ἡμικύκλιον δ', ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

18 Semicirculus, est figura quæ sub dimetiente, & ea quæ ex ipsa circuli circunferentia sublata est, continetur.

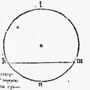


Vt ea figura, quæ ex f, h, dimetiente, & dimidia circuli circumferentia f g h, comprehenditur. Semicirculus enim, cum sit dimidium circuli non potest alijs lineis, quàm dimetiente, & media claudi circumferentia.

Sectio circuli

Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

19 Sectio circuli, est figura quæ sub recta linea, & circuli circunferentia, aut maiore aut minore semicirculo continetur.



Cùm enim recta linea per circuli centrum minime ducitur, utrinque tamen in circumferentiam terminatur: ea circulum ipsum in binas partes dispescit inæquales, quæ circuli sectiones adpellantur. Quarum ea quæ centrum includit circuli, ut k l m, obiectæ descriptionis maior dicitur: reliqua uerò, ut k n m, minor adpellatur. Ipsa porrò linea recta k m, chorda siue subtensa: & comprehensa circumferentiæ pars, arcus respondenter nominatur.

Rectilineæ

Chorda.

Arcus.

De rectilineis figuris.

POST circularem figuram, quæ unico clauditur limite, succedunt rectilineæ, hoc est, rectis lineis terminatæ figuræ, uariam quidem, pro laterum numero angulorúmue qualitate, denominationem obtinentes: quæ ita ab Euclide diffiniuntur,

Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

20 Rectilineæ figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur.

Porrò inter rectilineas figuras, primum locum sibi uendicant trilateræ, sub tribus rectis lineis comprehensæ. Quoniam sub duabus lineis rectis non potest contineri figura, per ipsius lineæ rectæ descriptionem. subiungit itaque generalem trilaterarum figurarum diffinitionem.

Trilatera figura rectilinearũ prima.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

21 Trilateræ figuræ sunt, quæ sub tribus rectis continentur lineis.

His succedunt quadrilateræ, a quaternario laterum numero denominatæ.

Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

Quadri-

Quadrilateræ figuræ ſunt, quæ ſub quatuor comprehenduntur rectis lineis. 22

Et quoniam rectilinearum figurarum ſupra quadrilateras per continuam laterum additionem, infinita uidetur exereſcere multitudo, quam ſingulatim deſcribere, longum nimis uel impoſſibile foret: idcirco reliquas omnes multilateras adpellauit Euclides, & ſub hac diffinitione complexus eſt.

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Multilateræ figuræ ſunt, quę ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur. 23

Quæ quidem multilateræ figuræ, longè faciliorem ab angulis, quàm ab ipſa laterum multitudine, ſortiuntur nomenclaturam: utpote, pentagona hexagona, heptagona, octogona, &c. ſunt enim in rectilinea quacunque figura tot anguli, quot & latera. Cùm autem omnis multilatera figura immediate reſoluatur in trilateras, uel partim in trilateras, partim uerò in quadrilateras: ſubiungit propterea primùm trilaterarum, deinde quadrilaterarum figurarum, tum ab ipſis lateribus, tum ab angulis ſumpta diſcrimina. Omnis itaque trilateræ figuræ, aut tria latera ſunt adinuicem æqualia, uel duo tantum, aut nulla.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

Trilaterarum porrò figurarum, æquilaterum eſt triangulum, quod tria continet æqualia latera. 24

Veluti ſubſcripta in exemplum trianguli figura a, & quæ illi ſimiles.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

Trilaterarũ figurarum à lateribus diſcrimina.

Iſoſceles autem eſt, quod ſub binis tantum æqualibus lateribus continetur. 25

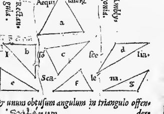
Cuiuſmodi ſunt triangula b, c, d, ad clariorem ſingulorum euidẽtiam depicta.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Scalenum verò eſt, quod ſub tribus inæqualibus lateribus continetur. 26

Vt obiecta e, f, g, triangula: & quæ ſunt eiuſcemodi.

Ab angulis autem totidẽ differentias nanciſcuntur ipſa triangula. Omnis ſiquidẽ triãguli, uel tres anguli ſunt acuti, uel unus rectus & cæteri duo acuti, aut denique unus obtuſus & reliqui itidem acuti: duos enim rectos aut duos obtuſos, uel unum rectum & unum obtuſum angulum in triangulo offendere



dere non est possibile. Hanc igitur angularem trilaterarum differentiam, ita subscribit Euclides,

Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

27 Amplius trilaterarum figurarum, rectangulum triangulum, est, quod rectum angulum habet.

Trilaterarū figurarum ab angulis differentiæ.

Vt isosceles b, uel scalenum triangulum e, proxima diffinitione descriptum.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

28 Ambligonium autem, quod obtusum angulum habet.

Veluti antecedens isosceles d, scalenúmue triangulum g.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

29 Oxygonium verò, quod tres habet acutos angulos.

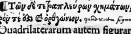
Cuiusmodi sunt æquilaterum a, & isosceles c, atque triangulum scalenum f, & quæ eis similia sunt triangula. Omnis porrò trianguli unumquodque latus, cæteris duobus expressis, basis uocitatur. Sequitur itaque, rectāgula & amblygonia triangula, fore tantummodo isoscelia, uel scalena: oxygonium autem, & æquilaterum, & isosceles, & scalenum offenditur triangulum. Quemadmodū ex suprascriptis triangulorum licet elicere figuris. Haud dissimiliter quadrilaterarū figurarum, tum ab angulorum rectitudine uel obliquitate, tum ab æqualitate uel inæqualitate laterum, succedentia colliguntur discrimina.

Basis trianguli

Quadrilaterarum figurarum discrimina.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστι, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

30 Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod & æquilaterum & rectangulum est.



Veluti quadratum h. Omnis itaque quadrati unumquodque latus, radix eiusdem indifferenter ad pellatur. Fit enim quadratum, ex data linea recta abstractiuè in seipsam rectissimè ducta: quemadmodum numerus in seipsum ductus, quadratum efficit numerum.

Radix quadrati.

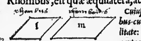
Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

31 Altera parte longius, est quod rectangulum quidem, at æquilaterum non est.

Quemadmodum suprascripta figura k, quoad angulorum rectitudinem conueniens cum ipso quadrato, dissidens autem ex parte laterum.

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

32 Rhombus, est quæ æquilatera, at rectangula non est.



Cuiusmodi est figura l. Conuenit itaq; rhombus cum ipso quadrato, in sola laterū æqualitate: habet enim duos obtusos, & totidem acutos angulos, quatuor rectorum simul efficientes

efficientes quantitatem.

Ῥομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπ' ἐναντίου πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Rhomboides verò est, quæ ex opposito latera & angulos habés æquales, neque æquilatera, neque rectangula est. 33

Quemadmodum supra depicta figura m, repræsentat. súntque hæc omnia nuper enarrata quadrilatera, parallelogramma: id est, quorum opposita latera sunt adinuicem parallela, seu æquidistantia. Neque plures quadrilaterarum & regularium figurarum contingit inuenire differentias: hinc dicit Euclides,

Parallelogramma.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

Præter hæc autem reliqua quadrilatera, trapezia adpellantur. 34

In quibus uidelicet nulla oppositorum uel laterum, uel angulorum simul obseruatur æqualitas, siue respondētia: uelutí sunt n, & o, & quæcunque eis similes quadrilaterorum descriptiones.



Parallelarum linearum diffinitio vltima.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι αἳ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ in eodem existentes plano, & ex vtraque parte in infinitum productæ, in nulla parte concurrunt. 35

Quales tibi repræsentant a b, & c d, lineæ rectæ. In quarum uidelicet alteram, utpote a b, recta linea e f, ad æquales seu rectos incidens angulos: & cum reliqua c d, rectos itidem uel æquales angulos efficit. Ex eo enim alterius in alteram æqualis utrobique surgit inclinatio: unde fit, ut ipsæ datæ lineæ in infinitum ex utraque parte productæ, æqualiter seu parallelicè distent, nusquam adinuicem concurrentes.



Αἰτήματα. Postulata.

ORONTIVS.

SECVNDO loco sese offerunt postulata, quæ petitiones nonnulli appellantur. Sunt autē postulata, generales quædā propositiones, ex ipsis collectæ diffinitionibus: quæ pēdenter ab auditore cōcessæ, postulātur, assumūtur ue in ordinē seu rationē principij. Primū itaque postulatū, est huiusmodi.

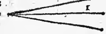
Postulata quæ.

Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ab omni puncto in omne punctū, rectā lineam ducere. 1

Potest

Potest enim datũ quodcunque punctum, in aliud quodlibet punctum, etiam ubilibet imaginatum, per uiam abstractiuè fluendo breuissimam, rectam describere lineam. quemadmodum ex quatuor primis licet elicere diffinitionibus. Admittẽda est itaque linea recta quantalibet, ac quibus uoluerimus punctis, ubilibet indifferenter terminata.



¶ Καὶ πεπερασμένην κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

2 Rectam lineam terminatam, in continuum rectumque producere.

Nam utrunque punctum ipsius datæ rectæ lineæ terminatiuum, per rectum eiusdem puncti defluxum, quantumlibet abstractiuè continuatum, potest ipsam datam lineam rectam efficere longiorem. quemadmodum ex data linearum rectarum colligitur descriptione.

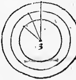
2



¶ Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

3 Omni centro & interuallo, circulum describere.

Hoc est, licet ubicunque uolueris, centrum designare circuli, & circa idem centrum, ad liberã semidiametri quantitatem, ipsum figurare circulum. Aut (si uelis) ex data quacunque linea recta terminata, altero eiusdem lineæ termino ubiuis collocato, per completam ipsius lineæ circunductionem, circulum describere. Admittẽdi igitur sunt, liberæ quantitatis circuli, pro data semidiametri uel interualli magnitudine.



¶ Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

4 Omnes angulos rectos, adinuicem æquales esse.

Cùm enim dati cuiuslibet anguli recti magnitudo quadrans existat circuli, eiusdémque circuli quadrantes sint adinuicem æquales: fit ut inter quosuis angulos rectos nulla possit esse differentia, sed omnes sint adinuicẽ æquales. Quẽadmodum ex his quæ septima, nona, & decima præmisimus diffinitionibus, elicere uel facilè potes.

¶ Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν, αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

5 Si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit; rectas lineas in infinitum productas concurrere necesse est, ad eas partes in

quibus anguli duobus rectis minores existunt.

Vtpote, si in rectas a b, & c d, recta incidens e f, interiores angulos b e f, & d f e, simul cōparatos, duobus rectis minores fecerit: ipsæ lineæ a, b & c d, in infinitum productæ, conuenient tandem in g, ad partes quidem b, & d. Quoniam plus inclinantur adinuicē partes b, d, quàm a, c. Vnde quanto magis producentur b e, & d f, partes, tanto propiores efficientur, in unum tandem signum (utpote g) concurrentes. Secus est de a, e, & c f, partibus: propterea quòd anguli a e f, & c f e, sunt duobus angulis rectis tanto maiores, quanto eisdem rectis minores fuerint ipsi b e f, atque d, f, e, anguli.



De cæteris postulatis.

Possent & alia his haud dissimilia subrogari postulata: quæ tamen sint omnibus (etiam rudissimis) per sese manifesta, uel quæ recenseantur indigna, hoc quinario cum Euclide contenti erimus numero.

Κοιναὶ ἔννοιαι. Communes sententiæ.

ORONTIVS.

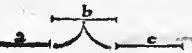
RELIQVVM est tandem, communes elucidare sententias: quas Græci axiomata, Latini uerò effata solent adpellare. Sunt igitur communes sententiæ, generales quædam ac per sese manifestæ propositiones, communitéruе scitæ ab omnibus, & in principij rationem uel ordinē coassumptæ. Quarum prima est hæc,

Axiomata, effata, seu communes sententiæ.

Communes sententiæ rationem æqualitatis respicientes.

Τὰ τῷ αὐτῷ, ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Quæ eidem æqualia, & adinuicem sunt equalia. 1



Vtpote, si a, magnitudo sit æqualis b, magnitudini, eidem quoque b, sit æqualis magnitudo c: necessum est a & c, magnitudines fore adinuicem æquales. Idem habeto iudicium de numeris, atque cæteris eiusdem generis adinuicem comparabilibus.

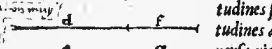
Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Et si æqualibus æqualia adiiciantur, omnia erunt æqualia. 2

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquentur æqualia erunt. 3

Vt si d, & e, magnitudinibus nuicem æqualibus, æquales addantur magnitudines f & g, consurgent d f, & e g, magnitudines adinuicem pariter æquales. Quòd si uersa uice ab ipsis d f, & e g, magnitudinibus īuicē æqualibus, æquales tollātur, f quidē & g, magnitudines: relinquentur d, & e, magnitudines rursum adinuicē æquales.



Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

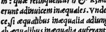
Et si inæqualibus æqualia adiungantur, omnia inæqualia erūt. 4

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστὶν ἄνισα.

Et si

5 Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erũt.

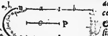
Si nãque h, k, magnitudinibus inæqualibus, æquales adiungãtur magnitudines l m: consurgent inæquales adinuicem magnitudines h l & k m. Aut si ab eisdem inæqualibus magnitudinibus datis h l & k m, æquales auferantur l & m: quæ relinquentur h & k, magnitudines, erunt adinuicem inæquales. Vnde & uersa uice, si æqualibus inæqualia adiungantur, uel ab æqualibus inæqualia auferantur: consurgent, aut relinquentur inæqualia. Hæ sunt igitur quinque præcipuæ communes sententiæ, rationem æqualitatis inter magnitudines, atque inuicem comparabilia, tum facta inuicem comparatione, tum addendo, subtrahendóue occurrẽtem respicientes.



Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

6 Quæ eiusdem duplicia sunt, adinuicem sunt æqualia.

Hoc est, quæ eiusdem sunt æquè multiplicia, uel æquè superparticularia, aut æquè superpartientia, uel (ut summatim comprehendam) æquè maiora: ea sunt adinuicem æqualia, nempe quòd æquali excessu eandem superẽt magnitudinem. Vt si n, & o, magnitudines, eiusdem magnitudinis p, sint æquè maiores, utpote duplæ: necessum est easdem magnitudines n & o, fore adinuicem æquales. Nam æqualibus magnitudinibus ipsi p, in eisdem n & o, comprehensis, æquales adduntur excessus. Idem censeto de numeris, & quibuscunque inuicem comparabilibus rebus, eadem ad tertiam maioris inæqualitatis rationem obtinentibus.

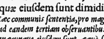


Cõmunis sententia, pro ratione maioris inæqualitatis.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἥμισυ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

7 Et quæ eiusdem sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem.

Hæc communis sententia, pro magnitudinibus rationem minoris inæqualitatis ad eandem tertiam obseruantibus magnitudinem, ita uenit intelligenda: ut quæcunque eiusdem sunt æquè submultiplicia, aut superparticularia, uel subsuperpartientia, hoc est, æquè minora, ea sũt adinuicem æqualia. Vtpote, si q & r, magnitudines, eiusdem magnitudinis s, sint (uerbi gratia) subduplæ: illæ erunt adinuicem æquales, propterea quòd æquali ab eadem magnitudine superentur excessu.



Cõmunis sententia pro ratione minoris inæqualitatis.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

8 Et quæ sibimetipsis conueniunt, æqualia sunt adinuicem.

Vtpote, si duæ rectæ lineæ in limitibus, duæue superficies in terminis, seu lateribus & angulis, & quæ sunt similia similibus ex omni parte conueniant, ea oportet adinuicem æquari, & è contrario.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Totum est sua parte maius.

Adde, quòd & æquale suis partibus integralibus, id est quæ simul sumptæ ipsum totum uidentur integrare.

Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Duæ rectæ lineæ superficiem non concludunt.

Prius quàm enim superficiem concludere ualerent: operæpretium esset, gemina puncta utriusque datarum linearum terminos limitantia mutuò conuenire. Duæ itaque lineæ rectæ, à dato puncto in datum punctum producerentur: coinciderent igitur in unam atque eandem lineam rectam, superficiem concludere nõ ualentes, quemadmodum ex iis, quæ quarta prædiximus diffinitione, fit manifestum.

De problemate, Theoremate, atque Hypothesi.

Problemata. Theoremata. EX his itaque sanè quàm intellectis principijs, colliguntur problemata: hoc est, ambiguæ propositiones, sciscitationésue, practicas figurarum affectiones discutientes: & Theoremata, id est, speculatiuæ propositiones, præceptionis utcunque participes, quæ singulis accidunt figuris sola inspectione diiudicantes. Quæ quidem omnia tali sunt artificio ab Euclide distributa, ut ex antecedentibus omnis consequentium uideatur pendere comprobatio: fiátque mutua subministratio singulorum inter sese & problematum & theorematum. Quibus suffragantur hypotheses, hoc est, ex præuia supradictorum cognitione, assumenti concessæ suppositiones.

Hypotheses.

Propositio prima

Super data linea

Finge lineam, ibi considera terminos duos. Mox effice ut illi duo termini sint sive puncta, sint duo centra duorum circulorum se [illegible] intersecantium: mox super illam lineam terminatam, si effinges alias duas rectas que procedant singulae a suo centro (nam erant duo centra) usque ad circumferentias duorum circulorum [illegible] comparatam cum linea recta data [illegible] aequalem: Quia sunt lineae procedentes ab eodem centro ad eandem circumferentiam: Atqui semper huiusmodi lineae sunt aequales: Ergo linea data est aequalis [illegible]: Ergo [illegible] illae lineae sunt aequales per primum axioma: Ergo et si est triangulum effectum ab illis [illegible] est [illegible] triangulum aequilaterum: quia tria latera sunt aequalia.

Super data

Probatur haec propositio prima per postulatum 3 et per 15 definitionem quae bis assumitur ad eam probandam et per axioma primum [illegible] omnino per prima immediata. Quod dicit super lineam [illegible] modo aliae duae ducantur commode ad circumferentias circulorum ipsius lineae datae sive supra sive infra, sive [illegible], sive [illegible].

ex 2 proposi.

[illegible] sunt aequalia. Atqui altera linea [illegible] complet [illegible] trianguli [illegible] prodit a centro circuli minoris ad circumferentiam [illegible] linea quae fuerat data. Ergo ipsae duae sunt aequales. Hac vero altera quae [illegible] fuerat data est aequalis illi quae ducta est a puncto dato ad circumferentiam circuli maioris: Ergo quae ducta est a puncto dato est aequalis lineae [illegible]

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

Πρόβλημα α, Πρόθεσις α.

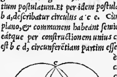
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

EVCLIDIS LIBRI PRIMI

Problema I. Propositio I.

Super data linea recta terminata, triangulum æquilaterum constituere.

ORONTIVS. Sit data linea terminata a b, cuius limites sint a & b, puncta: super quam oporteat triangulum æquilaterum constituere: hoc est, datam rectam lineam terminatã in latus ipsius coaptare triãguli, & reliqua duo latera, quæ sint eidem lineæ datæ æqualia, ex superius enarratis principijs inuestigare. Centro igitur a, interuallo autem a b, describatur circulus b c d, per tertium postulatum. Et per idem postulatum, centro rursum b, eodémque interuallo b a, describatur circulus a c e. Cùm igitur circuli b c d, & a c e, in eodẽ sint plano, & communem habeant semidiametrum, nempe datam a b, rectam, trãseátque per constructionem unius circunferẽtia per centrum alterius: necessum est b c d, circunferẽtiam partim esse intra circulum a c e, partim uerò extra, & è contrario, & propterea sese mutuo intersecare. Sit ergo sectionum altera in puncto c: & connectantur tandem rectæ lineæ a c, & b c, per primum postulatum. Triangulum est itaque a b c, (non congruunt enim, neque in directum constituuntur ipsæ a b, b c, & c a, lineæ rectæ: sed trigonam includũt superficiem a b c) dico quòd & æquilaterũ. Quoniam punctum a, centrum est circuli b c d, æqualis est igitur a c recta, ipsi a b: per decimamquintam diffinitionem. Rursum, quoniam punctum b, centrum est circuli a c e: æqualis est, per eandem diffinitionem b c recta, eidem a b. Duæ igitur a c, & b c, eidem a b, sunt æquales: eapropter & æquales adinuicem, per primam communem sententiam. Tres itaque lineæ a b, b c, c a, sunt adinuicẽ æquales. Igitur super data recta linea terminata a b, constitutum est triangulum æquilaterum a b c. Quod facere oportebat.



Nota propositionis interpretationem.

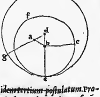
Πρόβλημα β, Πρόθεσις β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Problema 2. Propositio 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ponere.

ORON



ORONTIVS. ¶Sit datum punctum a, data uerò linea recta b c, cui expedit, ad ipsum punctum a, æquam rectam lineam ponere. Ducatur itaque recta a b, per primũ postulatum: super qua triangulum æquilaterum constituatur a b d, per primam propositionem. Et centro b, interuallo autem b c, circulus describatur c e f, per tertium postulatum. Atque per secundum postulatum, producatur recta d b, in ipsius circuli circunferentiam: sitque d e. Centro rursum d, interuallo autem d e, circulus describatur e g h, per idem tertium postulatum. Producatúrque tandem recta d a, in circunferentiam ipsius e g h, circuli, per secundum postulatum: sitque d g. Cũm igitur punctum b, centrum existat circuli c e f: æqualis est b c, recta ipsi b e, per decimamquintam diffinitionem. Rursum quoniam punctum d, centrum est e g h, circuli: æqualis est, per eandem diffinitionem, recta d e, ipsi d g. A quibus si auferantur a d, & b d, inuicem æquales (nempe latera trianguli æquilateri) reliqua a g, reliquæ b e, per tertiam communem sententiam erit æqualis. Atqui monstratum est, quòd & b c, eidem b e, est æqualis. Binæ igitur a g, & b c, eidem b e, sunt æquales: quapropter & æquales adinuicem, per primam cõmunem sententiam. Ad datũ ergo punctũ a, datæ rectæ lineæ b c, æqualis recta linea posita est a g. Quod oportuit fecisse.

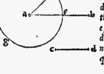
Πρόβλημα γ, Πρότασις γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Problema 3. Propositio 3.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, à maiori minori æquam rectam lineam abscindere.

ORONTIVS. ¶Sint datæ binæ rectæ lineæ inæquales, a b, quidem maior, minor uerò c d: cui receptum sit, ab ipsa maiore a b, æquam lineam rectam abscindere. Ad datum ergo punctum a, alterum ipsius maioris a b, limitem, eidẽ minori c d, ponatur æqualis, per secundam propositionem: sitque a e. Et centro a, interuallo autem a e, circulus describatur e f g, per tertiũ postulatũ. Cũ igitur a e, recta sit æqualis ipsi c d, sitq; c d, minor ipsa a b, per hypothesin: erit & a e, eadem a b minor. quæ enim sunt æqualia, eiusdem sunt æquè minora, per conuersam septimæ communis sententiæ. Egredietur ergo a b, maior ipsa a e, circunferentiam circuli e f g, ad interuallum eiusdem a e, descripti, eandémque circunferentiam egrediendo secabit: secet igitur in puncto f. Et quoniam punctum a, centrum est circuli e f g: æqualis est a f, recta ipsi a e, per decimamquintam



tam

tam diffinitionem. Eidem porrò a e, æqualis est & recta c d. Binæ igitur a f, & c d, eidem a e, sunt æquales: & propterea æquales adinuicē, per primam communem sententiam. Est autem & a f, pars ipsius maioris a b. Duabus ergo lineis rectis inæqualibus datis, a b quidem & c d: à maiori a b, secta est a f, ipsi c d, minori æqualis. Quod oportebat facere.

Θεώρημα α, Πρότασις δ.

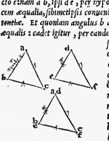
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Thorema I. Propositio 4.

I duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: & basin basi æqualē habebunt, & triangulum triangulo æquum erit: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt alter alteri, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

ORONTIVS. ❡ Sint bina triangula a b c, & d e f, habentia duo latera a b, & a c, duobus lateribus d e, & d f, alternatim æqualia, hoc est, a b, ipsi d e, & a c, ipsi d f: atque angulum b a c, æqualem angulo e d f, sub æqualibus rectis lineis contento. Dico primum, quòd basis b c, est æqualis basi e f. Comparato nanque triangulo a b c, ipsi d e f, atque puncto a, supra d, punctū constituto, extensáque recta a b, super rectam d e, conueniet pūctum b, ipsi puncto e: nam a b, ipsi d e, per hypothesin est æqualis. quæ autem sunt adinuicem æqualia, sibimetipsis conueniunt, per conuersam octauæ communis sententiæ. Et quoniam angulus b a c, angulo e d f, per hypothesin quoque est æqualis: cadet igitur, per eandem conuersam, a c, recta super rectam d f: secus enim alter angulorū foret reliquo maior, contra ipsam hypothesin. At cū a c, & d f, rectæ, sint ex eadē hypothesi adinuicē æquales: cōueniet rursum punctū c, ipsi puncto f, per allegatam octauæ cōmunis sententiæ conuersionem. Binæ igitur rectæ b c, & e f, ab eodē cōmuni puncto, ad idē commune punctū educētur: conuenient ergo adinuicē, per datā ipsius lineæ rectæ diffinitionē. Conuenientibus enim b e, & c f, limitibus, si eædē b c, & e f, rectæ minimè conuenirent: duæ lineæ rectæ includerent superficiem, contra decimam communem sententiam, & diffinitam rectarum linearum descriptionem:

Pars prima theorématis



Pars secunda.

Tertia pars.

conuenit itaque b c, ipsi e f. Quæ autẽ sibimetipsis cõueniũt, æqualia sunt adinuicem, per octauam communem sententiam. basis ergo b c, basi e f, concluditur æqualis. ¶ Dico præterea, quòd triangulum a b c, triangulo d e f, æquum est. Conueniunt enim singula latera ipsius a b c, trianguli, singulis d e f, trianguli lateribus: & triangulum igitur triangulo conuenit. Vnde per candem octauam communem sententiam, a b c, triangulum, ipsi d e f, triangulo æquũ erit. ¶ Aio tandem, reliquos angulos reliquis angulis, sub quibus æqualia subtenduntur latera, fore alterutrum alteri æquales: utpote a b c, ipsi d e f, sub quibus a c, & d f, & a c b, ipsi d f e, sub quibus a b, & d e, latera subtenduntur æqualia. Conueniunt enim singula latera singulis lateribus, sub quibus ipsi continentur anguli. Ex laterum porrò conuenientia æqualis eorundem subsequitur inclinatio: ex æquali autem inclinatione laterum, contentorum angulorum conuincitur æqualitas. Si bina igitur triãgula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c. ut in theoremate. Quod erat demonstrandum.

Θεώρημα β, Πρόθεσις ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Theorema 2. Propositio 5.

Isoscelium triangulorum qui ad basin sunt anguli, adinuicẽ sunt æquales: & productis æqualibus lineis, qui sub basi sunt anguli adinuicem æquales erunt.

ORONTIVS. ¶ Sit triangulũ isosceles a b c, cuius latera a b, & a c, sint adinuicem æqualia. Hæc autem uersus d, & e puncta, in continuum rectũmque producantur, per secundum postulatum. Aio itaque primum, angulos a b c, & a c b, qui ad basin b c, fore adinuicem æquales: angulum præterea d b c, angulo b c e, sub eadem basi b c, constituto, itidem coæquari. Suscipiatur enim in b d, recta contingens punctũ, sitque illud d, & data recta b d, secetur ei æqualis c e, per tertiam propositionem: connectantúrque b e, & c d, lineæ rectæ, per primum postulatũ. Cùm igitur a b, sit æqualis a c, per hypothesin, & b d, ipsi c e, per constructionem: erit & a d, ipsi a e, per secundam communem sententiam, æqualis. Bina ergo latera a b, & a e, trianguli a b e, sunt æqualia duobus a c, & a d, triãguli a c d, alterum alteri: estq; angulus qui a d a, sub quo æquis lateribus comprehensus, utriq; triangulo communis. Basis igitur b e, basi c d,

Primus ostensionis discursus.



Secundus.

est æqualis: & totum triangulũ a b e, toti triangulo a c d, æquale: atque reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia subtenduntur latera, respondenter æquales, utpote a b e, ipsi a c d, & a d c, ipsi a e b: per quartam propositionem. Rursum, quoniam b d, ipsi c e, per cõstructionem est æqualis, & b e, ipsi c d, æqualis ostensa est: bina propterea latera d b, & d c, trianguli d b c, duobus

e b,& e c,ipsius e b c,trianguli lateribus sunt alternatim æqualia:& contentos sub ipsis æqualibus lateribus angulos,utpote,qui ad d,& e monstrauimus æquales:eandémque basin subtendunt b c. Triangulum igitur d b c, triangulo e b c,est æquale,& reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia subtenduntur latera,adinuicem æquales:per eandem quartam propositionem. Angulus itaque d b c,angulo b c e,est æqualis:nec non angulus b c d,ipsi angulo c b e. Totus porrò angulus a b e,toti angulo a c d,æqualis nuper ostensus est. Igitur si ab ipsis æqualibus angulis a b e,& a c d, æquales auferantur anguli b c d, & c b e:qui relinquentur anguli a b c,& a c b,ad basin b c,erunt per tertiam communem sententiam adinuicem æquales. Et qui sub eadem basi b c, sunt anguli,utpote, d b c,& b c e,nunc quoque monstrati sunt æquales. Isoscelium ergo triangulorum,qui ad basin sunt anguli,& c. ut in theoremate. Quod demõstrare oportebat.

Recollectio demonstrationis.

Corollarium.

Hinc manifestum est,triangulum æquilaterum tres angulos adinuicẽ æquales continere. Quoniam binatim sumpta latera,semper offenduntur æqualia:& duo quoque anguli omnifariam sumpti,consequenter æquales.

Θεώρημα γ, Πρόθεσις 5.

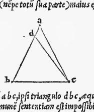
Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Theorema 3, Propositio 6.

Si trianguli duo anguli,æquales adinuicem fuerint, æquales quoque angulos subtendentia latera,æqualia adinuicem erunt.

ORONTIVS. Esto a b c,triangulũ,cuius anguli a b c,& a c b,sint adinuicẽ æquales. Dico propterea quòd latus a b,æquũ est lateri a c. Si nanque a b, & a c,latera forent inæqualia,alterũ esset maius:utpote, a b. Posset itaque à maiori a b,secari ipsi a c,minori æqualis,per tertiã propositionẽ. esto igitur b d:& conectatur c d rectã,per primũ postulatũ. Cadet igitur recta c d,intra triangulũ a b c,diuidétque latus a b,& angulũ a c b,in duos angulos,atque datũ a b c,triangulũ in bina triangula a c d,& d b c. Atqui a b c triangulũ,ipso d b c, triangulo(nẽpe totũ sua parte) maius est:per nonã cõmunem sententiam. Quòd si a c, recta foret æqualis ipsi b d,& b c,sit utrique triangulo cõmunis:essent bina latera a c, & c b,trianguli a c b,æqualia binis lateribus c b, & b d,ipsius trianguli c b d,quæ cũ æquales adinuicẽ cõprehẽdant angulos a b c,& a c b, per hypothesin:basis a b,dati a c b, trianguli, foret æqualis basi c d,ipsius trianguli c b d, per quartã propositionẽ:ipsum denique triangulũ a b c,ipsi triangulo d b c,æquale,totũ uidelicet suæ parti,quod per nonam communẽ sententiam est impossibile. Nõ est igitur a b,latus maius a c. Similiter ostendetur,quòd neque minus. Aequũ est itaque latus a b,ipsi lateri a c. Si itaque trianguli itaque duo anguli,æquales inuicem fuerint:æquales quoque angulos subtendentia latera,æqualia adinuicem erunt. Quod fuerat ostendendum.

Demonstratio ab impossibili.



Corollarium.

¶ Et proinde fit manifestũ triangulum æquiangulum, fore uersa uice æquilaterũ. anguli enim binatim sumpti, semper offenduntur æquales: & duo quoque latera omnifariam sumpta, respondenter æqualia.

Θεώρημα δ'. Πρότασις ζ.

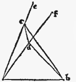
Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Thorema 4. Propositio 7.

Super eadẽ recta linea, duabus eisdẽ rectis lineis, aliæ due rectæ lineæ æquales altera alteri nõ constituentur: ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem fines primis rectis lineis possidentes.

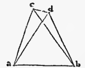


ORONTIVS. ¶ Super data inquàm recta linea a b, duæ rectæ lineæ a c, & b c, à limitibus a, & b, ad datum punctum c, constituãtur. Dico quòd super eadem a b, aliæ duæ rectæ lineæ, utpote a d, & b d, ad aliud pũctũ, hoc est d, ad easdẽ quoque partes, non cõstituẽtur eisdem a c, & b c, altera alteri æquales, utpote a d, ipsi a c, & b d, ipsi b c, eosdem fines a & b, cum eisdem primis rectis lineis a c, & b c possidentes. Aut enim punctum d, cadet in alterutrã linearum a c, & b c, uel intra easdem, aut extra. Atqui in alterutram datarum linearum, ipsum d, punctum minimè potest incidere. Cadat enim (si possibile sit) in rectã b c. coincidet igitur b d, recta, super rectam b c: & cum d, sit aliud punctum quàm c, erit eadem b d, pars ipsius b c. Non erit igitur b d, æqualis b c: totum enim foret æquale suæ parti, cõtra nonam communem sententiam. Similiter ostendetur, quòd neque in a c, rectam, neque in alterutram aut a c, aut b c, in continuum rectũmque productã, cadet idem punctum d. ¶ Dico prætereà, quòd neque intra easdẽ lineas, a c, & b c, ipsum d c pũctum potest incidere. Esto enim (si fuerit possibile) ut in subscripta figura, & connexa c d, recta, per primum postulatum, utraque a c, & a d, per secundũ postulatum, in continuum rectũmque, usque ad e, & f, signa producatur. Triangula igitur a c d, & b c d, super eadem basi c d, constituta, forent isoscelia, & angulus propterea a c d, æquus esset angulo a d c: necnon b c d, angulus, ipsi b d c, respondenter æqualis, per primam partem quintæ propositionis: & per secundam eiusdem propositionis partem, qui sub eadem basi c d fiũt anguli,



guli, adinuicem quoque forent æquales: utpote, c d f, ipsi d c e. Angulus porro d c e, maior est angulo b c d (nempe totus sua parte) ac propter & c d f, angulus foret eodem angulo b c d, maior: & maior consequenter ipso angulo b d c. nam æquales anguli, eiusdem sunt æque maiores, uel æque minores: per cõuersam sextæ, atque septimæ communis sententiæ interpretationem. Est autem c d f, angulus, pars ipsius anguli b d c. Particularis igitur angulus, maior esset totali: quod per eandem nonam communem sententiam est impossibile. ¶Haud dissimile sequetur inconueniens: ubi datum punctum d, inciderit extra præfatas lineas rectas, a c, & b c. Si nanque id possibile foret, uel earum altera quæ ex a, puncto, alteram quæ ex b, secabit: aut nulla dabitur prædictarum linearum intersectio. Secet primum a d, ipsam b c: & connectatur c d, recta, per primum postulatum. Triangula rursum a c d, & b c d, essent isoscelia: & qui ad communem utriusque trianguli basin c d, fiunt anguli, per primam partẽ ipsius quintæ propositionis, æquales adinuicem, utpote, a c d, ipsi a d c, & b c d, ipsi b d c. Atqui angulus a c d, angulo b c d, maior est, per nonam communem sententiam: recta enim b c, diuidit a b d c, quadrilaterũ, & angulum propterea a c d. Igitur & a d c, angulus, eodem angulo b c d, maior esset: & maior consequenter ipso b d c, angulo. angulus porro a d c, est pars ipsius anguli b d c: recta nanque a d, diuidit eundem b d c, angulum, atque a b d c, quadrilaterum. Pars itaque, totum rursum excederet: quod ipsi nonæ communi uidetur aduersari sententiæ. Idem etiam concludetur, ubi a c, recta secuerit b d: ubiue punctum d, ita seorsum locabitur, ut nulla subsequatur prædictarũ linearum intersectio. quemadmodum ex secunda figuræ dispositione deducere uel facile potes, c, in d, atque è diuerso permutato. Non sunt igitur a c, & a d, recta lineæ, neque b c, & b d, adinuicem simul æquales. Super eadem ergo recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. ut in theoremate. Quod demonstrare oportebat.

Tertia figurę differentia.



Θεώρημα ε. Πρότασις η.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

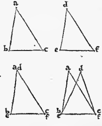
Theorema 5. Propositio 8.

SI bina triangula, duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, & basin quoque basi æqualem: angulum quoque sub æqualibus lineis contentum æqualem habebunt.

ORONTIVS. ¶Sint bina triangula a b c, & d e f, habẽtia duo latera a b, & a c, duobus lateribus d e, & d f, alternatim æqualia, hoc est, a b, ipsi d e, & a c, ipsi d f: sitque basis b c, basi d f, itidem æqualis. Aio itaque angulum b a c, angulo e d f, esse respondenter æqualem. Comparatis nanque adinuicem trian-

 gulis.

gulis, & puncto b, supra punctum e, constituto, extensáque basi b c, in rectum ipsius e f: conueniet punctum c, cum puncto f, per conuersam octauæ communis sententiæ. Conuenientibus autem b & e, atque c & f punctis: conueniet, & punctum a, cum puncto d. Quoniam si a & d, puncta minimè conuenirent: sequeretur ex hypothesi laterum, quòd super easdem recta linea b c, aut e f, duabus eisdem lineis a b, & a c, uel a e, & a f, aliæ duæ rectæ lineæ d b, & d c, seu d e, & d f, ad aliud atque aliud punctum, hoc est, a & d, ad easdem quoque partes, eosdem denique fines b, & c, uel e & f, primis rectis lineis possidentes, altera alteri constituerentur æquales. quod per antecedentem septimam propositionem demonstratum est impossibile. Congruit igitur d, punctum, ipsi puncto a: quapropter & angulum b a c, angulo e d f, congruere necessum est, foréque illi æqualem. Congruentibus enim terminis, congruunt & ipsæ lineæ rectæ. ex rectarum porrò conuenientia, sub quibus ipsi continentur anguli: eadem surgit inclinatio, ex qua demum pari linearum inclinatione, eorundem angulorum conuincitur æqualitas. Ergo si bina triangula, duo latera duobus lateribus &c. ut in theoremate. Quod oportuit demonstrasse.



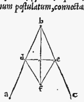
Πρόβλημα δ, Πρότασις θ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Problema 4, Propositio 9.

DAtum angulum rectilineum, bifariam secare. 9

ORONTIVS. Esto datus rectilineus angulus a b c: quē oporteat bifariam secare. suscipiatur igitur in a b recta, cōtingens punctum d: secetúrque à reliqua b c, ipsi b d, æqualis, per tertiam propositionem, sitque illa b e. Et per primum postulatum, connectatur recta d e: super quam triangulum æquilaterū d e f, per primam propositionem constituatur. connectatur tandem recta b f, per idem primum postulatū. Manifestum est igitur, rectam b f, secare datum angulū a b c, protrahitur enim ab angulo qui ad b, ad oppositum angulū qui ad f, in b d f e, quadrilatero. Aio quòd & ipsa b f, datum a b c, angulum bifariam secat. Cùm enim b d, per constructionem sit æqualis ipsi b e, communis autem b f: bina itaque latera d b, & b f, trianguli d b f, duobus lateribus f b, & b e, trianguli f b e, sunt alternatim æqualia. Est insuper basis d f, basi e f, itidem æqualis: sunt enim latera trianguli æquilateri d e f. Angulus igitur d b f, angulo f b e, per octauam propositionē est æqualis. Datus itaque rectilineus angulus a b c, bifariam à recta b f, secatur. Quod facere oportebat.



Πρόβλημα ε. Πρότασις ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

Problema 5. Propositio 10.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

ORONTIUS. Sit data recta linea terminata a b, quam bifariam secare sit operæpretium. Constituatur igitur super eadem a b, triangulum æquilaterum a c b, per primam propositionem: secetúrque per antecedentem nonam propositionem angulus a c b, bifariam, recta quidem c d, a puncto c, in d, punctum ipsius lateris a b, coextensa. Dico lineam a b, datam, secari bifariam in puncto d. Cum enim a c b, triangulum sit æquilaterum, æqualis est a c ipsi c b, communis uerò c d. Binæ igitur a c, & c d, trianguli a c d, duabus d c, & c b triãguli d c b, sunt altera alteri æquales: & qui sub ipsis æquis lateribus continentur anguli, per constructionem sunt adinuicem æquales, hoc est, a c d, ipsi d c b. Basis igitur a d, basi d b, est æqualis, per quartam propositionem. Data igitur recta linea terminata a b, bifariam secta est in puncto d. Quod oportuit fecisse.



Πρόβλημα ς, Πρότασις ια.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Problema 6, Propositio 11.

Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

ORONTIUS. Esto recta linea data a b, datúmque in ea punctum c: à quo oporteat, rectam lineam ad angulos rectos excitare. Suscipiatur igitur in a c, recta, cõtingens punctũ: sitque illud d: secetur præterea à recta c b, ipsi d c, æqualis, per tertiam propositionem, utpote c e. Denique super recta d e, triangulũ æquilaterum constituatur d f e, per primam propositionem: connectaturque recta c f, per primũ postulatũ. Dico c f rectam, ad rectos angulos consistere super datam rectam a b. Quoniam d c, est æqualis ipsi c e, communis autem c f, diuidens d f e triangulũ. Duæ igitur f c, & c d, trianguli f c d, duabus f c & c e trianguli f c e, sunt altera alteri æquales: & basis d f basi f e, per cõstructionem æqualis. Angulus itaque f c d, angulo f c e, sub æqualibus rectis lineis contento, per octauam propositionem est æqualis. Recta igitur c f cõsistens super rectam a b, æquales utrobique facit angulos: ergo rectos, per decimam diffinitionem. A dato igitur puncto c, datæ rectæ lineæ a b, recta linea c f, ad rectos excitata est angulos. Quod faciendum susceperamus.



Πρόβλη-

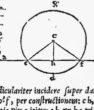
Πρόβλημα ζ, Πρόθεσις ιϛ.

Ἐπὶ τῶν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Problema 7. Propositio 12.

SVper datam rectam lineam infinitam, a dato puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam deducere.

ORONTIUS. Sit data recta linea infinita a b, datũ uerò punctum quod in ea non est c: à quo in ipsam a b, perpendicularem rectam lineam deducere sit operæprecium. In eodem itaque plano, in quo data a b, recta linea infinita, & datum punctum c, ex opposita quidem parte ipsius c, contingens punctum suscipiatur: sitque illud d. Erit igitur c d, interuallum, dirimétque ipsam a b, rectam. Centro ergo c, interuallo autem c d, circulus describatur e f g, per tertium postulatum. Hic porrò circulus e f g, cùm in eodem sit plano, in quo & recta a b, sitque finitus, eadem uerò a b, infinita, & dirępta ab interuallo c, d: subtendet propterea idem e f g, circulus partem ipsius a b, egredietúrque eadem a b, recta circunferentiam ipsius e f g circuli, eandéque circunferentiam egrediendo secabit. Secet igitur in e, & f punctis: diuidatúrque recta, e f subtensa e f bifariam, in puncto quidem h, per decimam propositionem: & connectatur tandem c e, c h, atque c f, rectæ, per primum postulatum. Dico itaque, rectam c h, perpendiculariter incidere super datam rectam a b.



Constructio figuræ.

Ostensio problematis.

Quoniam e h, æqualis est ipsi h f, per constructionem: c h, uerò dirimens c e f, triangulum, utrique communis. Binæ igitur c h, & h e, trianguli c h e, duabus c h, & h f, triãguli c h f, sunt altera alteri æquales: basis quoque c e, basi c f, æqualis, per decimamquintam diffinitionem. Aequus est igitur angulus c h e, angulo c h f, subæquis lateribus contento, per octauam propositionem. Recta ergo c h, consistens super datam rectam lineam a b, æquales utrobique facit angulos: ergo rectos. Et proinde c h, perpendicularis est super a b, per decimam diffinitionem. Super datam itaque rectam lineam infinitam a b, à dato puncto c, quod in ea non est deducta est perpendicularis c h. Quod fecisse oportuit.

Θεώρημα ϛ, Πρόθεσις ιγ.

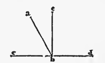
Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

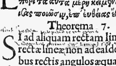
Theorema 6, Propositio 13.

CVm recta linea, super rectam consistens lineam angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

ORONTIUS. Incidat inquàm a b, recta, super rectã c d, efficiens angulos a b c, & a b d. Anguli itaque a b c, & a b d, aut sunt æquales adinuicem, aut inæ-

inæquales. Si æquales, ergo recti, per decimam diffinitionem, prima igitur pars uera. Quòd si inæquales extiterint ipsi a b c, & a b d anguli, utpote, a b c recto minor, & eodem recto maior a b d: dico nihilominus eosdem angulos a b c, & a b d, fore binis rectis angulis æquales. Quoniã a b c, & a b d, anguli sunt inæquales: non est igitur a b recta, perpendicularis super rectam c d, per conuersam ipsius decimæ diffinitionis. Excitetur ergo super data recta linea c d, à dato in ea puncto b, perpendicularis b e, per undecimam propositionem. Diuidet itaque recta b e, angulum a b d, recto maiorem: nec non recta a b, ipsum angulũ e b c, rectum, maiorem acuto a b c. Aequus est igitur angulus e b c, binis angulis a b e, & a b c. communis adijciatur angulus e b d. bini itaque anguli e b c, & e b d, tribus angulis, hoc est, a b c, a b e, & e b d, sunt æquales, per secundam communẽ sententiam. Angulus rursum a b d, æquus est duobus angulis a b e, & e b d. communis addatur angulus a b c. Duo igitur anguli a b c, & a b d, tribus angulis, utpote, a b e, a b c, & e b d, sunt per eandẽ secundam communẽ sententiam æquales. Atqui monstratum est, quòd & anguli e b c, & e b d, eisdem tribus æquantur angulis. Anguli porrò qui eisdem sunt æquales angulis, adinuicem quoque sunt æquales, per primam communem sententiam. Igitur anguli a b e, & a b d, duobus e b c, & e b d, sunt æquales. Sunt autem per constructionem anguli e b c, & e b d, recti: & duo igitur anguli a b c, & a b d, binis sunt rectis æquales. Idem etiam ostendetur, ubi a b c angulus fuerit maior ipso a b d. Cùm igitur recta linea, super rectam consistens lineam, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demõstrare.





Θεώρημα ζ. Πρόθεσις ιγ.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Theorema 7. Propositio 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, utrobique duobus rectis angulos æquales fecerint: ipsæ in directum rectæ lineæ adinuicem erunt.

ORONTIVS. ¶Ad datam enim rectam lineam a b, atque ad eius pũctum b, duæ rectæ lineæ b c, & b d, altera quidem ad læuam c, reliqua uerò ad dexteram partem d, conuenientes: angulos efficiant a b c, & a b d, aut rectos, aut duobus rectis æquales. Aio propterea, rectam lineam b d, in directum ipsius b c, fore constitutam, hoc est, unam eandémque rectam efficere lineam. Nam si recta

 b d, non

b d, non fuerit in directum ipsius b c, constituta: producta b c, in continuum rectúmque, ab ipso b uersus e, per secundũ postulatũ, non cadet ipsa b e, cum, b d. Cadat ergo (si possibile sit) inter a b, & b d. Recta igitur a b, incideret super rectam c e, ad angulos a b c, & a b e, aut recto, uel duobus rectis æquales, per decimamtertiam propositionẽ. Atqui duo anguli a b c, & a b d, aut recti sunt, aut binis itidem rectis æquales, per hypothesin. Anguli itaq; a b c, & a b d, angulis a b c, & a b e, forent per primam communem sententiam æquales. Dempto igitur communi angulo a b c, reliquus a b d, reliquo a b e, per tertiam communem sententiam æquaretur, maior minori, hoc est, totum suæ parti: quod per nonam communem sententiam est impossibile. Idem quoque deducetur inconueniens, si producta b e, detur incidere sub ipsa b d. In directum est igitur b d. ipsi b c: quod demonstrandum fuerat. Si ad aliquam igitur rectam lineam, atque ad eius punctum duæ rectæ lineæ, &c. ut in theoremate.



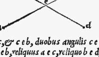
Θεώρημα η, Πρότασις ιε.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Theorema 8, Propositio 15.

SI duæ rectæ lineæ se adinuicem secuerint, angulos qui circa verticem sunt, æquos adinuicem efficient. 15

ORONTIVS. ¶ Secent se adinuicem binæ rectæ lineæ a b, & c d, in pũcto quidẽ e: dico quòd angulus a e c, æquus est angulo b e d, circa e uerticem posito. Incidit enim recta c e, in rectam a. b, efficiens angulos a e c, & c e b, duobus rectis æquales: per decimamtertiam propositionem. Recta insuper b e, incidens super rectam c d, facit angulos c e b, & b e d, binis itidem rectis æquales: per eandem decimamtertiam propositionẽ. Anguli porrò qui eisdem, ut pote binis rectis æquantur, & hi quoque sunt adinuicem æquales, per primam communem sententiam. Et duo igitur anguli a e c, & c e b, duobus angulis c e b, & b e d, sunt æquales. Dẽpto itaque cõmuni c e b, reliquus a e c, reliquo b e d, per tertiam cõmunem sentẽtiam est æqualis. Simili discursu mõstrabitur, quòd anguli a e d, & c e b, sunt æquales adinuicẽ. Si duæ igitur rectæ lineæ se adinuicẽ secuerint, angulos qui circa uerticẽ sunt, æquos adinuicẽ efficient. Quod oportebat ostendere.



Corollarium.

¶ Hinc manifestum est, quotlibet rectas lineas in eodem puncto sese adinuicem intersecantes, angulos efficere quatuor rectis æquales.

Θεώρημα θ, Πρότασις ιϛ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.

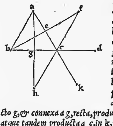
Theorema 9, Propositio 16.

Omnis

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus utrisque interioribus & ex opposito maior est.

ORONTIUS. Esto datum a b c, triangulum, cuius unum latus, utpote b c, producatur in directum ad punctum usque d, per secundum postulatum. Aio itaque primùm, exteriorem angulum a c d, maiorem esse intrinseco & ex opposito b a c. Secetur enim a c, bifariam in puncto e, per decimam propositionem: & connectatur b e, recta, per primum postulatum: quæ per secundum postulatum extendatur in directum uersus f: secetúrque recta e f, æqualis ipsi b e, per tertiam propositionem: tandem connectatur recta c f, per idem primum postulatum. Cum igitur a e, sit æqualis e c, & b e, ipsi e f, itidem æqualis, per constructionem: binæ itaque a e, & e b, trianguli a e b, duabus c e, & e f trianguli c e f, sunt altera alteri æquales: & æquos adinuicem efficiunt angulos a e b, & c e f, per decimamquintam propositionem, nempe qui circa e uerticem. Basis igitur a b, basi c f, est æqualis: & triangulum a e b, æquale triangulo c e f, atque reliqui anguli b a c, reliquo e c f, æqualis, per quartam propositionē. Angulus porrò a c d, maior est angulo a c f, per nonam communem sententiam: quapropter & ipso b a c, angulo maior: æquales enim angulis, eiusdem sunt æquè minores. Dico insuper, quòd idem angulus a c d, maior est a b c, angulo. Diuisa namque b c, bifariam in puncto g, & connexa a g, recta, productáque ipsi a g, æquali g h, connexa itē c h, atque tandem producta a c, in k, per nunc expressa postulata, citatásque propositiones: haud dissimili discursu colligemus, angulum a b g, æquum esse angulo g c h. Et quoniam angulus b c k, angulo b c h, maior est, per nonam communē sententiam: erit & idem angulus b c k, ipso a b c, angulo maior. Aequus est autem a c d angulus ipsi b c k, per decimamquintam propositionem: & angulus igitur a c d, eodem angulo a b c, maior est. Omnis itaque triāguli uno latere producto, exterior angulus utrisque interioribus & ex opposito maior est. Quod erat demonstrandum.

Prima demōstrationis pars.



Secūda pars.

Θεώρημα ι. Πρόθεσις ιζ.

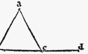
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Theorema 10. Propositio 17.

Omnis trianguli, duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

ORONTIUS. Esit triangulum a b c. Dico in primis, duos angulos a b c, & a c b, duobus rectis esse minores. Producatur enim b c, latus in directum, usque ad punctum d: per secundum postulatum. Exterior igitur angulus a c d, maior est interiore & ex opposito a b c, per decimamsextam propositionem. Addatur utrique eorundem angulorum, cōmunis a c b. Duo igitur anguli a b c,

Præcipua ostēsionis pars.



& a c b, duobus angulis a c b, & a c d, sunt minores, per quartam communem sententiã. Anguli porrò a c b, & a c d, duobus rectis sunt æquales, per decimamtertiam propositionem. Et duo igitur anguli a b c, & a c b, eisdem binis rectis sunt minores: ijdem nanque anguli, æqualium angulorum æquè minores existunt. ¶ *Nec dissimili uia, anguli b a c, & a c b, duobus itidem rectis ostendetur esse minores: necnon a b c, & c a b anguli, producto a b, uel a c latere. Omnis itaque trianguli, duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti. Quod expediebat demonstrare.*

De ceteris an
gulorum cō
binationibus.

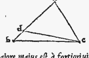
Θεώρημα ια, Πρόθεσις ιη.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Theorema 11. Propositio 18.

Omnis trianguli maius latus, sub maiori angulo subtẽditur. 18

ORONTIVS. ¶ *Sit triangulum a b c: cuius latus a b, maius sit a c, latere. dico quòd a c b angulus, maior est angulo a b c. Secetur enim à maiori a b, ipsi minori a c, æqualis, per tertiam propositionem: sitque illa a d, & connectatur c d recta, per primum postulatum. Diuidit itaque recta c d, triangulũ a b c, & angulum propterea a c b. Maior est igitur angulus a c b, angulo a c d, per nonam communem sententiam. Ipsi porro a c d angulo, æquus est angulus a d c, per primam partem quintæ propositionis: sunt enim per constructionem a c, & a d, latera adinuicem æqualia. Et a c b, igitur angulus, maior est angulo a d c. Angulus rursum a d c, maior est interiore, & ex opposito d b c, hoc est a b c, angulo, per decimamsextam propositionem. Multo maior igitur est angulus a c b, ipso d b c, seu a b c, angulo: quod enim maiore maius est, à fortiori uidetur esse maius. Omnis itaque trianguli maius latus, sub maiori angulo subtenditur. Quod demonstrandum susceperamus.*



Θεώρημα ιβ, Πρόθεσις ιθ.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Theorema 12. Propositio 19.

Omnis trianguli maior angulus, sub maiori latere subtenditur. 19

ORONTIVS. ¶ *Sit rursum a b c, triangulum, habens angulum a c b, maiorem angulo a b c. Aio uersa uice, quòd latus a b, maius est ipso latere a c. Si nanque a b, latus, non foret maius a c: esset igitur uel eidem a c æquale, uel eo minus. Aequum porrò non est a b, ipsi a c: quoniam anguli a b c, & a c b, per quintam propositionem, forent adinuicem æquales: sunt autem inæquales, per hypothe-*



hypothesin. non est igitur a b, latus, æquale ipsi a c. Neque etiam minus est a b, eodẽ a c, latere: esset enim angulus a c b, minor angulo a b c, per antecedentem decimamoctauam propositionem. hoc autem aduersatur hypothesi. Igitur a b latus, non est minus ipso a c, latere. ostensum est autem, quòd nec eidem æquale. Maius est igitur ipsum latus d b, eodem a c latere. Omnis ergo triãguli maior angulus, sub maiori latere subtenditur. Quod demonstrare fuerat operæprecium.

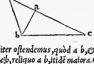
Θεώρημα ιγ, Πρότασις κ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραί, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Theorema 13, Propositio 20.

20 OMnis trianguli duo latera, reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

ORONTIVS. ¶ Esto datum a b c, triangulum. Dico primũm, duo latera a b, & a c, fore maiora reliquo b c. Producatur enim per secundum postulatũ, recta c a, in directũ, usque ad punctũ d: secetúrque a d, recta, æqualis ipsi a b, per tertiam propositionem. & connectatur b d, recta, per primum postulatum. Cùm igitur a b, sit æqualis ipsi a d, per constructionem: qui ad basin b d, sunt anguli, æquales adinuicem erunt, per quintam propositionem, utpote a b d, ipsi a d b. Angulus porrò d b c, maior est angulo a b d, per nonam communem sententiam: igitur & angulo a d b, maior. Triangulum igitur d b c, habet angulum d b c, maiorem angulo b d c. Omnis autem trianguli maior angulus sub maiori latere subtenditur, per decimamnonam propositionem: maius est itaque d c, latus, ipso latere b c. Atqui latus d c, æquum est ipsis a b, & a c, lateribus: data est enim a d, ipsi a b, æqualis, & utrique iungitur a c. Duo igitur latera a b, & a c, sunt maiora reliquo b c. Similiter ostendemus, quòd a b, & b c, latera maiora sunt reliquo a c: atque a c, & c b, reliquo a b, itidẽ maiora. Omnis itaque trianguli duo latera, reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta. Quod oportuit ostendisse.



Θεώρημα ιδ, Πρότασις κα.

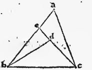
Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Theorema 14, Propositio 21.

21 SI trianguli à limitibus vnius lateris, binæ rectæ lineæ introrsum constituantur, quæ constituuntur, reliquis trianguli binis lateribus minores quidem erunt, maioremque angulum continebunt.

Primæ partis ostensio.

ORONTIUS. ¶In triangulo enim a b c, à limitibus lateris b c, duæ rectæ lineæ d b, & d c, introrsum, ad punctum d, constituantur. Aio itaque primum ipsas d b, & d c, lineas rectas, minores esse reliquis a b, & a c, lateribus. Producta nanque c d, quousque secet latus a b, in puncto quidem e, per secundũ postulatum: erunt bina latera a e, & a c, trianguli a e c, maiora reliquo e c, per uigesimam propositionem. Addatur ipsis a e, & a c, atque ipsi e c, communis e b: & composita igitur a b, & a c, latera, ipsis e b, & e c, lateribus, per quartam cõmunem sententiam, erunt maiora. Bina rursum latera e b, & e d, trianguli e b d, sunt maiora reliquo b d, per eandem uigesimam propositionem. Addatur ipsis inæqualibus communis d c: ergo bina latera e b, & e c, binis d b, & b c, lineis rectis sunt maiora, per eãdẽ quartam communem sententiam. Ostensum est autem, quod a b, & a c latera, eisdẽ e b, & e c, sunt maiora. Multò igitur maiora sunt eadem a b, & a c, latera, ipsis d b, & d c, lineis rectis, à limitibus b & c, introrsum constitutis.



Secũda pars.

¶Dico præterea, quòd angulus b d c, maior est angulo b a c. Trianguli enim e b d, exterior angulus b d c, maior est interiore & ex opposito b e d: idem quoque angulus b e d, interiore & ex opposito e a c, ipsius a e c, trianguli maior, per decimamsextã propositionẽ. Lõgè itaque maior est angulus b d c, ipso e a c, hoc est, b a c, angulo. Igitur si trianguli à limitibus unius lateris, binæ rectæ lineæ, & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod demonstrare oportebat.

Πρόβλημα η, Πρότασις κβ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Problema 8, Propositio 22.

Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum construere. Oportet autem duo latera, reliquo esse maiora quomodocunque assumpta: quoniam trianguli bina latera quomodocũque assumpta, reliquo sũt maiora.

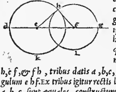
Constructio figuræ.

ORONTIUS. ¶Dentur ergo tres rectæ lineæ a b, c, adinuicem ita proportionatæ, ut duæ quomodocunque assumptæ, sint maiores reliqua: utpote, a & b, ipsa c, atque b, & c, ipsa a, denique a, & c, ipsa b. maiores. Oportet enim ipsius trianguli, ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis æquales construendi, duo latera, reliquo esse maiora, per uigesimam propositionem. Assumatur itaque recta quædam linea, ex altera parte puncto d limitata, infinita uerò secundum reliquã: à qua secentur tres rectæ lineæ, ipsis datis singulatim æquales, per tertiam propositionem, d e, quidem æqualis ipsi a: e f, autem ipsi b: & f g, ipsi c. Et centro e, interuallo autem e d, circulus describatur d h k: centro rursum f, & interuallo f g,

f g, alius describatur circulus g h l, per tertium postulatum. Et quoniam circuli d h k, & g h l, in eodem sunt plano, & e f, recta, ab unius circuli centro, ad cētrum alterius producitur: necessum est, eosdem circulos d h k, & g h l, sese mutuo intersecare. Si nanque minime se secarent, sed sese adinuicem tangerent, utpote in puncto h: tunc recta e f, ipsi b æqualis, utriusque circuli semidiametrum necessariò cōtineret: quapropter & duarum rectarum a, & c, magnitudinem. Esset enim e h, pars ipsius e f, æqualis d e, & propterea ipsi a: pars quoque h f, ipsi f g, & ipsi ergo c æqualis: quēadmodum ex decimaquinta diffinitione, & prima communi sententia deducere uel facilè est. Bina ergo trianguli latera, essent æqualia reliquo: contra datam hypothesin, & uigesimam proporsionem. Longe item maius inconueniens sequeretur: ubi circuli ipsi utcunque distare ponerentur. Secat igitur circulus d h k, circulum g h l: esto sectionum altera in puncto h: & connectantur rectæ e h, & h f, per primum postulatum. Triangulum est igitur e h f: dico quòd ex tribus rectis lineis constructum, quæ sunt tribus datis æquales. Cùm enim punctum e, sit centrum circuli d h k, æqualis est d e, ipsi e h, per decimamquintam diffinitionem. ipsa porrò d e, secta est æqualis ipsi a. Binæ igitur, hoc est a, & e h, eidem rectæ d e, sunt æquales: quapropter & æquales adinuicem, per primam communem sententiam: e f autem, ipsi b, data est æqualis per constructionem. Rursum quoniam punctum f, centrum est circuli g h l: æqualis est f h, ipsi f g, per andem decimamquintam diffinitionem: ipsa autem f g, secta est æqualis ipsi c. Ergo f h, & c, eidem f g, sunt æquales: igitur & æquales adinuicem, per eandem primam communem sententiam. Tres igitur lineæ rectæ e h, e f, & f h, tribus datis a, b, c, sunt adinuicem æquales: & constituunt triangulum e h f. Ex tribus igitur rectis lineis e h, e f, & f h, quæ tribus datis, hoc est, a, b, c, sunt æquales, constructum est triangulum e h f. Quod faciendum susceperamus.



Problematis ostensio.



Θεώρημα θ, Πρόθεσις κγ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

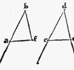
Problema 9, Propositio 23

AD datā rectā lineā, ad datūque in ea punctū, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

Figuræ constructio.

ORONTIVS. Sit data recta linea a b, & datum in ea punctum b: rectilineus porrò angulus c d e, cui receptū sit, ad datū punctum b, datæ rectæ lineæ a b, æquum angulum rectilineum constituere. Suscipiatur itaque in c d, recta, contingens punctum, sitque illud c: in d e, quoq; recta, contingens punctū, & illud

Figuræ constitutio. sit e, connectatur deinde recta c e, per primum postulatum. Ex tribus denique lineis rectis a b, b f, & f a, quæ sint tribus datis, hoc est, ipsius c d, e trianguli lateribus æquales, utpote a b, ipsi c d, & b f, ipsi d e, atque f a, ipsi e c, triangulum construatur a b f, per præcedentem uigesimã secundam propositionem. Dico angulum a b f, æquum fore ipsi angulo dato c d e. Cùm enim binæ lineæ rectæ a b, & b f, trianguli a b f, duabus lineis rectis c d, & d e, trianguli c d e, sint altera alteri æquales, basis quoque a f, basi c e, per constructionem æqualis: erit angulus a b f, angulo c d e, sub æqualibus rectis lineis contento, per octauam propositionem, æqualis. Ad datam ergo lineam rectam a b, & datum in ea punctum b, dato angulo rectilineo c d e, æqualis angulus rectilineus a b f, constitutus est. Quod fecisse oportuit.



Cõclusio problematis.

Θεώρημα ιε, Πρόθεσις κδ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

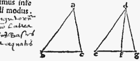
Theorema 15, Propositio 24.

SI bina triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, angulum verò angulo maiore sub æquis rectis lineis contentum: basin quoque, basi maiorem habebunt.

ORONTIVS. ¶ Sint bina triangula a b c, & d e f, habẽtia duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia, utpote, ab, ipsi d e, & a c, ipsi d f: sitque angulus qui ad a, maior angulo qui ad d, sub æquis lateribus contento. Aio itaque, basin b c, trianguli a b c, maiorem esse basi e f, trianguli d e f. Quoniam angulus b a c, maior est angulo d e f, per hypothesin: ad datam ergo lineam rectam e d, ad datúmque in ea punctum d, dato angulo rectilineo b a c, æqualis angulus rectilineus constituatur e d g, per uigesimamtertiam propositionem. Vtrique demum a c, & d f, æqualis ponatur d g, per secundam aut tertiam propositionem: connectantúrque rectæ e g, & g f, per secundum postulatum. Erunt itaque bina latera a b, & a c, trianguli a b c, æqualia duobus lateribus d e, & d g, trianguli d e g, alterum alteri: & qui sub eisdem lateribus continentur anguli, adinuicem æquales, per constructionem. Basis igitur b c, basi e g, per quartam propositionem est æqualis. ¶ His ita præmissis, quoniam triangulorum adinuicem comparatorum, uaria contingit habitudo: poterit itaque recta e g, diuersis incidere modis, ut pote, aut in directum ipsius e f, aut supra, uel infra. Cadat ergo primùm in rectam e f, ut in hac prima figuræ dispositione. Igitur cùm in triãgulo d e g, ab angulo qui ad d, in oppositum latus e g, recta producatur d f, diuidens tum ex hypothesi, tum ex constructione ipsum e d g angulum: diuidet quoque

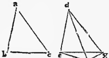
Constructio figuræ generalis.

Primus insere[n]di modus.



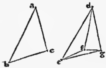
quoque ipsa d f, basin e g, in puncto quidem f. Est itaque basis e f, pars ipsius e g: & propterea ipsa e g, maior eadem e f, per nonam communem sententiã. Ipsi porrò e g, æqualis ostēsa est b c: & b c igitur basis, maior est basi e f, per conuersam sextæ communis sententiæ interpretationem. ¶Quòd si e g, recta inciderit supra e f, uelut in secunda figura, fiet triangulum e f g, ex tribus basibus constitutum. Et quoniam trianguli d f g, latus d f, lateri d g, est æquale: æquus erit & d f g, angulus, angulo d g f, per quintam propositionem.

Secūdus modus.



Atqui d g f, angulus, maior est angulo e g f, per nonam communem sentẽtiam: &, d f g itaque angulus, maior erit eodem angulo e g f, per eandem sextæ communis sententiæ conuersionem. Angulo rursum d f g, maior est angulus e f g, nempe totus sua parte: & propter ea ipso angulo e g f, tanto maior. Omnis porrò trianguli maior angulus, sub maiori latere subtenditur, per decimamnonam propositionẽ: maior est itaque e g, ipsa e f, recta Præostensum est autem, quòd & b c, ipsi e g coæquatur: basis ergo b c, basi e f, consequenter est maior. ¶Cùm autem e g, sub eadem e f, ut in tertia figuræ dispositione, ceciderit: idem etiam cõcludetur. Nam in triangulo d e g, a limitibus lateris d e, binæ rectæ lineæ d f, & e f, introrsum constituentur: erunt itaque d f, & e f, reliquis ipsius trianguli lateribus d g, & e g, minores, per uigesimamprimam propositionem. Subductis ergo d f, & d g, inuicẽ æqualibus: quæ relinquentur, erũt pariter inæquales, e g, quidem maior e f. Ipsi porrò e g, æqualis monstrata est b c: cõcludes ergo rursum b c, basin, fore maiorem ipsa basi e f. Igitur si bina triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, angulum uerò, &c. ut in theoremate. Quod ostendere fuerat operæpretium.

Tertius modus.



Θεώρημα ις, Πρότασις κε.

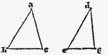
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Theorema 16, Propositio 25.

25 Si bina triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, basin uerò basi maiorem: angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorẽ habebũt.

ORONTIUS. ¶Dentur inquam bina triangula a b c, & d e f, habẽtia duo latera a b, & a c, duobus lateribus d e, & d f, æqualia alterum alteri, utpote, a b, ipsi d e, & a c, ipsi d f: esto autem b c basis, maior ipsa e f. Aio uersa uice, angulum

gulum b a c, angulo e d f, esse maiorem. Quoniam angulus b a c, non potest in primis æqualis esse angulo e d f: basis enim b c, basi e f, per quartam propositionem foret æqualis. Est autem b c, basis, maior ipsa e f, per hypothesin. Neque rursum angulus b a c, minor erit eodem angulo e d f: quoniam basis b c, minor itidem foret basi e f, per antecedentem uigesimamquartam propositionem. Atqui data est maior: non est igitur angulus b a c, ipso e d f, angulo minor. Patuit autem, quòd nec eidem æqualis: ergo maior. Si bina igitur triangula duo latera, & reliqua, ut in theoremate. Quod erat demonstrandum.



Θεώρημα ιζ, Πρόθεσις κϛ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

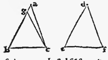
Theorema 17, Propositio 26.

SI bina triangula, duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint, vnúmque latus vni lateri æquale, aut quod æquis adiacet angulis, aut quod sub vno æqualiũ angulorum subtenditur: reliqua quoque latera reliquis lateribus æqualia alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

ORONTIVS. Sint triangula a b c, & d e f, habentia duos angulos qui ad latus b c, duobus angulis qui ad latus e f, alterum alteri æquales, utpote, a b c, ipsi d e f, & a c b, ipsi d f e, unum præterea latus uni lateri æquale: primò quidem quod æquis adiacet angulis, hoc est, b c, ipsi e f. Dico properea, quòd & reliqua latera reliquis lateribus alterum alteri habebunt æqualia, a b quidẽ ipsi d e, & a c, ipsi d f: atque reliquum angulum b a c, reliquo e d f, æqualem. Si nãque a b, non fuerit æqualis ipsi d e, altera earum maior erit: utpote a b: poterit igitur a maiori a b, secari ipsi d e, minori æqualis, per tertiam propositionem. Abscindatur ergo, sitque b g, & connectatur c g recta, per primum postulatum. Bina itaque latera g b, & b c, trianguli g b c, duobus lateribus d e, & e f, triãguli d e f, erunt alternatim æqualia: & qui ad b, & e, sub æquis lateribus cõtinentur anguli, adinuicem æquales, per hypothesin. Basis igitur g c, basi d f, & reliquus angulus g c b, reliquo qui ad f (sub quo latus æquale subtenditur) erit per quartam propositionem æqualis. Eidem porrò qui ad f angulo, æquus est angulus a c b, per hypothesin. Duo igitur anguli a c b, & g c b, eidem angulo qui ad f, erunt æquales: & propterea æquales adinuicem, per primam communem sententiam. totus itaque angulus, suæ parti æquabitur: quod per nonam communem

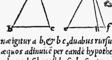
Primæ partis demõstratio, ex prima hypothesi laterum.

nem sententiam est impossibile. Non est igitur a b, maior ipsa d e: similiter ostẽdetur, quòd neque minor, ergo æqualis. Et quoniam b c, ipsi e f, per hypothesin est æqualis: bina ideo latera a b & b c, trianguli a b c, duobus lateribus d e, & e f. trianguli d e f, sunt æqualia alterum alteri, & æquales qui ad b & e comprehendunt angulos, per hypothesin: basis itaque a c, basi d f (seu reliquum latus, reliquo lateri) atque reliquus angulus b a c, reliquo e d f, per quartam propositionem æquatur.



¶ Sint autem quæ sub altero æqualium subtenduntur angulorum latera, adinuicem æqualia, scilicet a b, ipsi d e. Aio rursum, quòd & reliqua latera, reliquis lateribus habebũt æqualia, alterum alteri, utpote a c, ipsi d f, & b e, ipsi e f: atque reliquum angulum qui ad a, reliquo qui ad d, æqualem. In primis enim, si b c, non fuerit æqualis ipsi e f, altera maior erit, esto uerbi gratia e f: poterit ergo ab eadem maiori e f, secari æqualis ipsi minori b c, per tertiam propositionem. Secetur itaque & sit e h, connectatúrque d h, recta, per primum postulatum. Erunt igitur bina latera a b, & b c, trianguli a b c, æqualia duobus lateribus d e, & e h, trianguli d e h, alterum alteri, & qui ad b & e, sub eisdem æquis lateribus continentur anguli, sunt per hypothesin adinuicẽ æquales. Basis ergo a c, basi d h, & reliquus angulus a c b, reliquo d h e (sub quibus æqualia subtenduntur latera) per quartam propositionem æquabitur. Angulus porrò d f e, eidem angulo a c b, per hypothesin est æqualis. duo itaque anguli d f e, & d h e, eidem angulo qui ad c erunt æquales: & æquales propterea adinuicem, per primam communem sententiam. In triangulo igitur d f h, producto f h, latere, exterior angulus d h e, interiori & ex opposito d f h, æquabitur angulo: quod per decimamsextam propositionem est impossibile. Non est igitur e f, maior b c: simili discursu monstrabitur, quòd nec minor. æqualis est igitur b c, eidem e f: est autem & a b, ipsi d e, per hypothesin æqualis. Binæ igitur a b, & b c, duabus rursum d e, & e f, sunt æquales altera alteri: & æquos adinuicẽ per eandẽ hypothesin capiunt angulos. Reliquũ ergo latus a c, reliquo d f, hoc est basis basi, atque reliquus angulus qui ad a, reliquo qui ad d, respondẽter æquatur, per sæpius allegatam quartã propositionem. Ergo si bina triangula duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint: & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod oportuit demonstrasse.

Ostensio secundæ partis ex secũda hypothesi laterum.



Θεώρημα ιη. Πρότασις κζ.

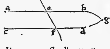
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Theorema 18. Propositio 27.

SI in binas rectas lineas recta incidens linea, alternatim angulos æquos adinuicem fecerit: parallelæ adinuicem ipsæ rectæ lineæ erunt.

ORONTIVS. ¶ Sint binæ rectæ lineæ a b, & c d, & in eas incidat e f,

recta, efficiátque alternos angulos a e f, & e f d, æquales adinuicem. Aio quòd a b recta, parallela est ipsi c d. Si nanque minimè forent parallelæ, productæ tandem in aliqua parte conuenirent, per conuersam ultimæ diffinitionis. Concurrãt ergo (si possibile sit) ad partes b, d, in puncto quidem g. Efficietur itaque triangulum e f g, cuius exterior angulus a e f, interiori & ex opposito e f g, æquabitur: quod per decimamsextã propositionẽ non uidetur esse possibile. Non conueniunt igitur a b, & c d, ad partes b, d. neque similiter ad partes a, c: idem nãque sequeretur inconueniens. Quæ autem in nulla parte conueniunt, per ultimam diffinitionem existunt parallelæ. Igitur a b, parallela est ipsi c d. Si in binas ergo rectas lineas, & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod erat ostendendum.



Θεώρημα ιθ. Πρότασις κη.

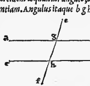
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Theorema 19. Propositio 28.

SI in binas rectas lineas recta incidens linea, exteriorem angulum interiori & opposito ad easdem partes æqualem fecerit, aut interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt adinuicem ipsæ rectæ lineæ.

Primæ partis ostensio.

ORONTIVS. ¶ Sint rursum binæ lineæ a b, c d, & in eas incidẽs e f recta, efficiat primum exteriorem angulum e g a, interiori & ex opposito ad easdem partes g h c, æqualem: Dico, quòd a b, ipsi c d, est parallela. Angulus enim g h c, angulo e g a, per hypothesin est æqualis, eidem rursum angulo e g a, æquus est ad uerticem positus b g h: per decimamquintam propositionem. Anguli porrò qui eidem æquantur angulo, æquales sunt adinuicem, per primam communẽ sententiam. Angulus itaque b g h, æquatur alterno g h c. Parallela est igitur a b, ipsi c d, per uigesimamseptimam propositionem.



Demõstratio secũdæ partis.

¶ Sint rursum interiores & ad easdẽ partes a g h, & g h c, anguli, binis rectis æquales: Aio rursũ, quòd & eadẽ a b, ipsi c d, est parallela. Anguli nanq; a g h, & b g h, duobus itidẽ rectis æquantur, per decimamtertiam propositionẽ. Qui autem eisdem, utpote binis rectis, sunt æquales anguli, & adinuicem sunt æquales, per primam communem sententiam. Duo itaque anguli a g h, & g h c, binis angulis a g h, & b g h, sunt æquales. A quibus subducto communi angulo a g h: reliquus b g h, reliquo & alterno angulo g h c, æquabitur: per tertiam communem sententiam. Parallela est igitur a b, ipsi c d, per eandem uigesimamseptimam propositionem. Si in binas

itaque

itaque rectas lineas, recta incidens linea, &c. ut in theoremate. Quod demõstrare oportebat.

Θεώρημα κ, Πρόθεσις κθ.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλας εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντός, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Theorema 20, Propositio 29.

IN parallelas rectas lineas, recta incidens linea: & alternatim angulos adinuicem æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

ORONTIVS. Sint a b, & c d, inuicē parallelæ: in quas incidat recta e f. Dico primum, quòd alternatim sumptos angulos efficit æquales: utpote a g h, ipsi g h d. Nam si a g h, non fuerit æqualis ipsi angulo g h d, alter eorum maior erit. Esto maior (si fieri possit) a g h: & utrique inæqualium angulorum, communis addatur b g h. Compositi igitur anguli b g h, & g h d, ipsis a g h, & b g h, angulis minores erunt: per quartam communem sententiam. Anguli porrò a g h, & b g h, binis rectis sunt æquales: per decimamtertiam propositionem. Igitur b g h, & g h d anguli, duobus rectis erunt minores. In rectas ergo lineas a b, & c d, recta incidens e f, interiores, & in eadem parte angulos duobus rectis minores efficiet. Conuenient itaque tandē a b, & c d, rectæ lineæ in infinitū productæ, ad partes b, d, per quintū postulatū: non erunt ergo parallelæ, per conuersam ultimæ diffinitionis. Hoc autē aduersatur hypothesi: æqualis est igitur angulus a g b, alteri g h d.

Prima theorematis pars.



Aio rursum, eandem e f, rectam exteriorem angulum, utpote e g b, interiori & opposito & ad easdem partes g h d angulo, æqualem efficere. Angulus siquidem e g b, ipsi ad uerticem posito a g h, per decimamquintam propositionem est æqualis: patuit quòd & g h d. Bini itaque anguli e g b, & g h d, eidem a g h, sunt æquales: quapropter & æquales adinuicem, per primam communem sententiam.

Secūda pars.

Dico tandem, quòd & interiores & ad easdē partes sumptos angulos, utpote, a g b, & g h c, binis rectis æquales efficit. Ostensum est enim, quòd angulus a g h, alterno g h d, est æqualis: communis utrique æqualium addatur angulus g h c. Bini igitur anguli a g h, & g h c, duobus angulis g h c, & g h d, per secundam communem sententiam adæquantur. Eisdem quoque angulis g h c, & g h d, bini recti sunt æquales, per decimamtertiam propositionem. Et a g h, igitur atque g h c, anguli, duobus rectis, per primam communem sententiam coæquantur. In parallelas igitur rectas lineas, recta incidēs linea, & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod oportuit demonstrasse.

Tertia pars.

Corollarium.

Quæ igitur in parallelas rectas lineas incidit, & in alteram perpendicularis existit: cum reliqua itidem cadit ad perpendiculum.

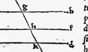
Θεώρημα κα, Πρόθεσις λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Theorema 21. Propositio 30.

Quæ eidem rectæ lineæ paralleli: & adinuicem sunt paralleli.

ORONTIUS. Esit utraque a b, & c d recta, eidem e f, parallela. Dico a b, & c d, fore itidem parallelas. Coincidat enim in ipsas lineas, recta quædam g h k. Cum igitur præfatæ lineæ in eodem existant plano, & recta g h, incidat in a b, & e f, parallelas, erit angulus a g h, alterno g h f, æqualis per primam partem uigesimænonæ propositionis. Rursum, quoniam recta g k, incidit in e f, & c d, parallelas: æquus erit interior & oppositus angulus h k d, exteriori & ad easdem partes, hoc est, eidem g h f, angulo, per secundam partem eiusdem uigesimænonæ propositionis. Duo itaque anguli a g h, & h k d, hoc est, a g k, & g k d, eidē angulo g h f, sūt æquales: & æquales igitur adinuicē, per primam communem sententiam. Sunt autem a g k, & g k d, anguli alterni, à recta g k, in a b, & c d, rectas incidente causati. Parallela est igitur a b, ipsi c d, per uigesimamseptimam propositionem. Quæ eidem igitur rectæ lineæ parallelæ, & adinuicem sunt parallelæ. Quod oportebat ostendere.



Corollarium.

Quæ uni igitur parallelarū est parallela, alteri quoque uersa uice parallela est.

Πρόβλημα ι, Πρόθεσις λα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Problema 10, Propositio 31.

PER datum punctum, datæ rectæ lineæ, parallelam rectam lineam deducere.

ORONTIUS. Esto datum punctum a, data uerò linea recta, cui per a punctum oporteat ducere parallelam, sit b c. Suscipiatur ergo in b c, recta contingens punctum d, & connectatur a d, recta, per primum postulatum. Ad datam insuper lineam a d, & in ea datū punctum a, dato angulo rectilineo a d b, æqualis angulus rectilineus constituatur d a e, per uigesimamtertiam propositionem. Et quoniā in rectas a e, atque b c, recta incidit a d, efficiens alternos angulos æquales, hoc est, a d b, ipsi d a e: parallela est igitur a e, ipsi b c, per uigesimamseptimā propositionem. Per datum itaque punctum a, datæ rectæ lineæ b c, parallelam duximus a e. Quod expediebat facere.



Θεώρημα κβ, Πρότασις λβ.

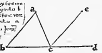
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Theorema 22, Propositio 32.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus binis interioribus & ex opposito est æqualis: & trianguli tres interiores anguli, binis rectis sunt æquales.

ORONTIVS. Esto triangulum a b c, cuius unum latus, utpote b c, producatur in d, per secundum postulatum. Aio primum, quòd exterior angulus a c d, binis interioribus & ex opposito, hoc est, a b c, & b a c, angulis est æqualis. Ducatur enim per datum punctũ c, datæ rectæ lineæ a b, parallela c e, per trigesimam primam propositionẽ. Quoniam igitur in a b, & c e, parallelas, recta incidit a c: æquus est angulus b a c, alterno a c e, per primam partem uigesimænonæ propositionis. Rursum, quoniam in easdem parallelas a b, & c e, coincidit recta b d: exterior angulus e c d, æqualis est interiori & opposito, ad easdem partes a b c, per secundam partem eiusdem uigesimænonæ propositionis.

Primæ illationis demõstratio.



Porrò si æqualibus anguli, æquales addantur anguli, qui inde consurgent, erunt adinuicem æquales, per secũdam communem sententiam. Totus igitur angulus a c d, binis interioribus & oppositis a b c, & b a c, angulis est æqualis. Dico insuper, quòd eiusdẽ trianguli tres interiores anguli, binis sunt rectis æquales. Patuit enim exteriorẽ angulum a c d, æquum esse duobus angulis a b c, & b a c. Quibus æqualibus angulis, si idem communis addatur angulus a c b: erunt per secundam communem sententiam, tres anguli a b c, b a c, & a c b, æquales binis angulis a c b, & a c d. Eisdem porrò angulis a c b, & a c d, duo recti itidem æquantur, per decimamtertiam propositionem. Tres igitur anguli a b c, b a c, & a c b, trianguli a b c, per primam communem sententiam, binis sunt rectis æquales. Omnis itaque triãguli, uno latere producto, & reliqua, ut in theoremate. Quod oportuit demonstrasse.

Secundæ partis vel illationis ostensio.

Corollarium.

Hinc fit manifestum, cuiuslibet trianguli tres angulos, æquales esse tribus angulis alterius cuiuscunque trianguli: nempe quòd eisdem, utpote binis rectis utrobique sint æquales.

Θεώρημα κγ, Πρότασις λγ.

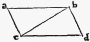
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνῦσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι.

Theorema 23, Propositio 33.

Quæ æquales & parallelos, ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

ORONTIVS. Sint æquales & adinicẽ parallelæ rectæ lineæ a b, & c d.

quas ad easdem partes coniungant rectæ a c, & b d. Dico a c, & b d, rectas, fore adinuicem æquales & parallelas. Connectatur enim b c, diagonius, per primum postulatum. In datas igitur a b, & c d, parallelas, recta incidens b c, efficit alternos angulos a b c, & b c d, adinuicem æquales, per primam partem uigesimænonæ propositionis. Est autem a b, recta æqualis ipsi c d, per hypothesin: & utrique comunis b c. Binæ igitur a b, & b c, trianguli a b c, duabus b c, & c d, trianguli b c d, sunt altera alteri æquales: & æquos adinuicem continent angulos, nempe alternos a b c, & b c d. Per quartam ergo propositionem, basis a c, æqualis est ipsi b d: atque reliquus angulus a c b, reliquo c b d, æqualis, utpote sub quibus æqualia subtenduntur latera. In rectas itaque lineas a c, & b d, recta incidens b c, efficit alternos angulos a c b, & c b d, adinuicem æquales: parallela est igitur a c, recta ipsi b d, per uigesimamseptimam propositionem. Patuit autem quòd & eidem æqualis. Aequas igitur & parallelas, & quæ sequuntur reliqua. Quod demonstrandum susceperamus.



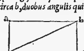
Θεώρημα κδ. Πρότασις λδ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Theorema 24. Propositio 34.

Parallelogrammorum locorum, latera quæ ex opposito, & anguli æqualia sunt adinuicem: & dimetiens ea bifariam secat.

Prima pars. ORONTIUS. Esto datum parallelogrammum a b c d, illius uerò dimetiens b c. Aio primùm, ipsius a b c, parallelogrammi latera quæ ex opposito, & angulos fore adinuicem æqualia. In parallelas enim a b, & c d, recta incidens b c, facit alternos angulos a b c, & b c d, æquales adinuicem: per primã partem uigesimænonæ propositionis. Eadem quoque b c, incidens in parallelas a c, & b d, efficit rursum alternos angulos a c b, & c b d, adinuicẽ æquales, per eandem uigesimamnonam propositionem. Duo itaque triangula a b c, & b c d, habent duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, unúmque latus uni lateri æquale, commune scilicet b c, quod æquis adiacet angulis. Reliqua igitur latera, reliquis lateribus erunt æqualia alterum alteri, hoc est, a b, ipsi c d, & a c, ipsi b d: atque reliquus angulus qui ad a, reliquo qui ad d, æquabitur, per uigesimamsextam propositionem. Monstrauimus autem binos angulos qui circa b, duobus angulis qui circa c, fore alternatim æquales. totus igitur angulus qui ad b, toti qui ad c, per secundam cõmunem sententiam æquabitur. Parall. logrãmi igitur a b c d, latera quæ ex opposito, & anguli æquantur adinuicem.



Pars secũda. Dico præterea, quòd & dimetiens illud bifariam secat. Ostensa est enim a b, æqualis ipsi c d, atque a c, ipsi b d, estque b c, communis. Bina itaque triangula a b c, & b c d, habent singula latera singulis lateribus æqualia:

æqualia: & eos qui sub æqualibus lateribus continentur angulos (uti nunc monstrauimus) singulatim æquales, utpote, a b c, ipsi b c d, & a c b, ipsi c b d, atque eum qui ad a, ei qui ad d, æqualem. Conuenit ergo triangulum a b c, triangulo b c d. Quæ autem sibimetipsis conueniunt, æqualia sunt adinuicem: per octauam communem sententiam. Triangulum igitur a b c, triangulo b c d, est æquale. Dimetiens itaque b c, datum parallelogrammum a b c d, bifariam secat. Quod ostendendum fuerat.

Θεώρημα κε, Πρόθεσις λε.

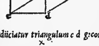
Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

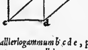
Theorema 25. Propositio 35.

Parallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis existentia: adinuicem sunt æqualia.

ORONTIVS. ¶ Sint parallelogramma a b c d, & c d e f, in eadem basi c d, atque in eisdem parallelis a f, & c d, constituta. Dico a b c d, parallelogrammũ, æquũ esse c d e f, parallelogrammo. Secet enim in primis latus unius, utpote, c e, alterius latus b d, in puncto quidem g. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera quæ ex opposito sunt adinuicem æqualia, per trigesimam quartam propositionem: utraque igitur a b, & e f, æqualis est ipsi c d. Quæ autem eidem æqualia, & adinuicem sunt æqualia, per primam communem sententiam: æqualis est igitur a b, ipsi e f. Communi addatur b e: tota igitur a e, toti b f, erit æqualis, per secundam communem sententiam. Est autem & a c, ipsi b d, æqualis, per eandem trigesimamquartam propositionem. Binæ itaque a c, & a e, trianguli a c e, duabus b d, & b f, trianguli b d f, æquales sunt altera alteri: & æquos adinuicem cõtinent angulos, nempe exteriorem d b f, interiori qui ad a, per secũdam partem uigesimænonæ propositionis. Basis itaque c e, basi d f, per quartam propositionem fit æqualis: atque triangulum a c e, triangulo b d f. A quibus subducto communi triangulo b e g, reliquum trapezium a b g c, reliquo trapezio e f d g, per tertiam communem sententiam æquabitur. Eisdem rursum æqualibus trapezijs, commune adijciatur triangulum c d g: consurgent a b c d, & c d e f, parallelogrãma adinuicem æqualia, per secũdam communem sententiam.

Prima theorematis differentia.



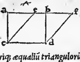


¶ Quòd si latus unius parallelogrammi, dimetiens alterius efficiatur, ut in hac secunda figura: idem, sed paulò leuius concludetur. Dimetiens enim b c, bifariam diuidit a b c d, parallelogrammum: similiter & b d, ipsum parallerlogammum b c d e, per trigesimamquartam propositionẽ. Fit igitur, ut utraque parallelogramma a b c d, & b c d e, eiusdem trianguli b c d, sint duplicia, & proinde æqualia adinuicem, per sextam communem sententiam.

Differentia secunda.

¶ Nec minus facile deducetur propositionis intelligentia, ubi latus unius parallelogram-

lelogrammi, in latus alterius inciderit, uelut in tertia figuræ dispositione. Erunt enim rursum a b, & e f, æquales adinuicem: à quibus dempta communi b e, reliqua a e, reliquæ b f, per tertiam communem sententiam erit æqualis. Hinc triãgulum a c e, triangulo b d f, ueluti supra mõstrabitur, æquale. Quòd si utriqꝫ æqualiũ trianguloꝛũ, addatur cõmune trapezium e b c d, resultabit iterũ a b c d, parallelogrammũ, eidẽ parallelogrammo c d e f, per secundam cõmunẽ sententiam æquale. Igitur parallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis existentia, adinuicem sunt æqualia. Quod erat ostendendum.



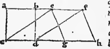
Θεώρημα κϛ. Πρόθεσις λϛ.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Theorema 26. Propositio 36.

Parallelogramma in equalibus basibus, & in eisdem parallelis existentia: adinuicem sunt æqualia.

ORONTIVS. Sint a b c d, & e f g h, parallelogramma, in basibus æqualibus c d, & g h, atque in eisdem parallelis a f, & c h, consistentia. Dico a b c d, parallelogrammum, æquari parallelogrammo e f g h. Connectantur enim rectæ c e, & d f, per primum postulatum. Et quoniam parallelogrammum est e f g h, æqualis est e f, ipsi g h, per trigesimamquartam propositionem. Eidem quoque g h, æqualis est c d, per hypothesin. Binæ igitur c d, & e f, eidem g h, sunt æquales, & propterea æquales adinuicem, per primam communem sententiam, suntque adinuicem parallelæ, ex hypothesi. Quæ autem æquales & parallelas coniungunt lineæ rectæ, æquales sunt & parallelæ, per trigesimamtertiã propositionẽ: & c e, igitur atque d f, æquales sunt & parallelæ. Parallelogrammum est itaque c d e f. Ipsi porrò c d e f, parallelogrammo, æquum est a b c d, parallelogrammũ, per trigesimamquintam propositionem, in eadẽ enim basi c d, atque in eisdem parallelis a f, & c h, constituuntur. Et per eandem trigesimam quintam propositionem, e f g h, parallelogrammum, æquum est ipsi c d e f, parallelogrammo: sunt enim in eadem basi e f, atque in eisdem parallelis a f, & c h. Bina igitur parallelogramma a b c d, & e f g h, eidẽ parallelogrammo c d e f, sunt æqualia: quapropter & æqualia adinuicem, per primam communem sententiam. Idem etiam ostendere licebit, de quacunque parallelogrammorum dispositione, hypothesi seruata. Parallelogramma igitur in basibus æqualibus, &c, ut in theoremate. Quod demonstrare oportebat.



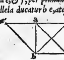
Θεώρημα κζ. Πρόθεσις λζ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Theorema 27. Propositio 37.

TRiangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, adinuicem sunt æqualia.

ORONTIVS. Sint triangula a b c, & d b c, in eadem basi b c, atque in eisdem parallelis a d, & b c, existentia. Dico triangulum a b c, æquari propterea triangulo d b c. Producatur enim utrinque a d, recta, usque ad puncta e, & f, per primum postulatum: & per punctum b, datæ rectæ lineæ a c, parallela ducatur b e, atque ipsi b d, parallela e f, per trigesimamprimam propositionem. Sunt itaque a c b e, & d b c f, parallelogramma, & in eadem basi b c, atque in eisdem parallelis b c, & e f, per hypothesin constituta: igitur adinuicem æqualia, per trigesimamquintam propositionem. Triangulum porrò a b c, dimidium est parallelogrammi a c b e, atque d b c, triangulum, dimidium ipsius d b c f, parallelogrammi: dimetientes enim a b, & c d, ipsa bifariam secant parallelogramma, per trigesimamquartam propositionem. Quæ autem æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem, per septimam communem sententiam. igitur a b c, triangulum, æquum est d b c, triangulo. Ergo triangula in eadem basi, & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum fuerat.



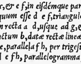
Θεώρημα κη. Πρόθεσις λη.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Theorema 28. Propositio 38.

TRiangula in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta adinuicem sunt æqualia.

ORONTIVS. Sint a b c, & d e f, triangula, in basibus æqualibus b c, & e f, in eisdémque parallelis a d, & b f, constituta. Aio triangulum a b c, æquum esse d e f, triangulo. Producatur enim utrinque in directum & continuum recta a d, usque ad g, & h, puncta: per secundum postulatum. Et per datum punctum b, datæ rectæ lineæ a c, parallela ducatur b g: atque per f, punctum, ipsi d e, parallela f h, per trigesimamprimam propositionem. Sunt igitur a c b g, & d e f h, parallelogramma, in basibus quidem æqualibus b c, & e f, ac in eisdem parallelis b f, & g h, per hypothesin constituta: & propterea æqualia adinuicem, per trigesimamsextam propositionem. Atqui parallelogramma a c b g, & d e f h, à dimetientibus a b, & d f, bifariam secantur, per trigesimamquartam propositionem. Est igitur a b c, triangulum dimidium ipsius a c b g, parallelogrammi: atque triangulum d e f, ipsius d e f h, parallelogrammi dimidium. Quæ autem æqualium sunt dimidium, ea sunt adinuicem æqualia, per septimam communem sententiam. æquum est igitur triangulum a b c, ipsi d e f, triangulo. Triangula itaque in æqualibus basibus, &c, ut in theoremate. Quod demonstrandum erat.



Θεώρημα κθ, Πρόθεσις λθ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Theorema 29, Propositio 39.

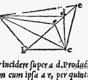
Conuersa 37.

TRiangula æqualia, in eadem basi constituta, & ad easdem partes: & in eisdem sunt parallelis.

ORONTIVS. ¶Sint in eadem basi b c, atque ad easdem partes a & d, trãgula a b c, & d b c, adinuicem æqualia. Dico quòd ex a, in d, connexa linea recta, ipsi b c, est parallela. si nanque a d, non fuerit parallela ipsi b c: poterit ad datum punctum a, ipsi b c, duci parallela, per trigesimamprimam propositionem. Ducatur igitur, & sit a e, quæ uel incidet sub a d, aut supra.

Prima ostensionis differentia.

Cadat primò infra, si possibile sit, & per primum postulatum connectatur recta c e, quæ cùm incidat intra d b c, triangulum, & ab angulo qui ad c, in b d, subtensum latus extendatur: diuidet ipsum d b c, triangulum. Erunt itaque a b c, & e b c, triangula, in eadem basi b c, ac in eisdem parallelis a e, & b c constituta: æquum erit propterea triangulum e b c, ipsi a b c, triangulo, per trigesimamseptimam propositionem. Eidem porrò a b c triangulo, æquum est d b c, triangulũ, per hypothesin. Bina itaque triangula d b c, & e b c, eidem a b c, triangulo erunt æqualia: & proinde æqualia adinuicem, per primam communem sententiam. Triangulum ergo d b c, æquum erit ipsi e b c, maius scilicet minori, seu (mauis) totũ suæ parti: quod non est possibile. Non cadit igitur a e, parallela, sub a d.



Secunda differentia.

¶Idem sequetur incõueniens, si eadẽ a e, detur incidere super a d. Producta enim b d, per secundum postulatũ, conueniet tãdem cum ipsa a e, per quintum postulatũ: propterea quòd recta a b, incidẽs in a e, & b d, rectas, facit interiores angulos, & ad easdem partes a b d, & b a e, minores duobus rectis (nẽpe minores a b c, & b a e, angulis, qui per tertiam partem uigesimænonæ propositionis erunt binis rectis æquales). Connexa itaque c e, recta, per primum postulatum, ea cadet extra d b c, triangulum: fiet propterea triangulum d b c, pars ipsius e b c, trianguli. Vtrunque rursum, ipsi a b c, concludetur æquale (e b c, quidem per trigesimamseptimam propositionem, & d b c, per hypothesin) & e b c, consequenter ipsi d b c, totum suæ parti: quod rursum est impossibile. omne siquidẽ totũ est sua parte maius, per nonã communem sententiam. Non cadit ergo parallela super a d, patuit quòd nec infra: igitur ex a, in ipsum d. Triãgula igitur æqualia, & quæ sequuntur reliqua. Quod oportuit ostendisse.

Θεώρημα λ. Πρόθεσις μ.

Conuersa 38.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Theorema 30, Propositio 40.

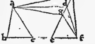
Triangula æqualia, in æqualibus basibus existentia, & ad easdem partes: & in eisdem sunt parallelis.

ORONTIVS. *Sint a b c, & d e f, triangula æqualia adinuicẽ, & in basibus æqualibus b c, & e f (in directũ quidẽ existentibus, semper uelim intelligas) atque ad easdem partes a, & d, constituta: & connectatur a d recta, per primum postulatum. Aio quòd a d, ipsi b f, est parallela. Nam si a d, non fuerint eidem b f, parallela: poterit per datum punctum a, ipsi datæ lineæ b f, alia quædam parallela duci, per trigesimamprimam propositionem. Ducatur igitur, si possibile sit, & sit a g. Cadet itaque a g, recta, uel supra a d, aut infra. Quodcunque autem dederis, eam cum e d (utraque in directum producta) conuenire necessum est: quoniam ex a, in e connexa per imaginationem linea recta, incidit in a g, & e d, efficiens angulos interiores, & ad easdem partes a e d, & e a g, duobus rectis (ueluti supra) minores.* ¶ *Incidat ergo primum a g, sub a d: & connectatur f g, per primum postulatum, dirimens d f, triangulum. Erit igitur triangulum g e f, æquum ipsi a b c, triangulo, per trigesimamoctauam propositionem: sunt enim in basibus æqualibus b c, & e f, ex hypothesi, & in eisdẽ parallelis a g, & b f, per datam constructionem. Ipsi porrò a b c, triangulo, æquum est per hypothesin d e f, triangulum. Triangula igitur d e f, & g e f, eidem a c b, triangulo erunt æqualia: & æqualia propterea adinuicem, per primam communem sententiam. Itaque triangulũ d e f, æquum erit ipsi g e f, triangulo, maius scilicet minori, hoc est, totum suæ parti: quod per nonam communem sententiam est impossibile.* ¶ *At si detur a g, incidere super a d, conuenient rursum a g, & e d, idémque subsequetur inconueniens. Producta siquidem e d, in g, per secundum postulatum: connectatur rursum f g, per primum, cadens extra d e f, triangulum. Túncque g e f, & d e f, triangula, eidem a b c, triangulo concludentur æqualia, g e f, quidem per trigesimamoctauam propositionem, & d e f, per ipsam hypothesin. Vnde rursum totum g e f, triangulum, suæ parti, hoc est, d e f, triangulo, per primam communem sententiam æquabitur: quod per ipsam nonam communem sententiam est impossibile. Cadit igitur parallela ex a, in d, uerticem. Concludendum ergo, triangula æqualia in æqualibus basibus existentia, & ad easdem partes, & in eisdem fore parallelis. Quod demonstrare fuerat operæpretium.* ¶ *Eadem quoque uia, supradictarum sex propositionũ concludetur intentum, ubi plura duobus oblata fuerint uel triangula uel parallelogramma: facta binatim, iuxta hypothesin, eorundem triangulorum uel parallelogrammorum comparatione.*

Prima demõstrationis differentia.

Secũda pars siue differentia.

Notandum.



Θεώρημα λα, Πρόθεσις μα.

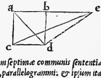
Ἐὰν παραλληλόγραμμον τρίγωνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσαι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Problema 13, Propositio 41.

Si parallelogrammum & triangulum eandem basin habuerint, in eisdémque fuerint parallelis: trianguli paralle-

logrammum duplum est.

ORONTIVS. Esto parallelogrammum a b c d, eandem habens basin c d, cum triangulo c d e, in eisdeque parallelis a e, & c d, constitutum. Aio a b c d parallelogrammum, fore duplum ipsius trianguli c d e. Connectatur enim a d, recta, per primum postulatum. Triangula igitur a c d, & c d e, erunt admuicem æqualia, per trigesimamseptimam propositionem: habent enim eandem basin c d, suntque in eisdem parallelis a e, & c d. Atqui triangulum a c d, dimidium est ipsius a b c d, parallelogrammi: secat enim illud bifariam dimetiens a d, per trigesimam quartam propositionem. Quæ autem sunt æqualia, eiusdem sunt dimidium: per conuersam septimæ communis sententiæ. Triangulum igitur c d e, dimidium est a b c d, parallelogrammi: & ipsum itaque parallelogrammum a b c d, eiusdē c d e, trianguli duplum. Si parallelogrammum igitur & triangulum, &c. ut in theoremate. Quod oportebat ostendere. Idem quoque demonstrabitur, ubi parallelogrammum & triangulum æquales habuerint bases, in eisdemque fuerint parallelis.



Notandum

Corollarium.

Hinc fit manifestum, cur in dimetiendis triangulorum areis, dimidium basis ducatur in perpendicularem: aut ipsius perpendicularis dimidium, per basin ipsam multiplicetur. Fit enim hoc modo dimidium parallelogrammi, quod in eadē basi, atque in eisdem collocatur parallelis cum ipso triangulo dato.

Πρόβλημα ια, Πρότασις μβ.

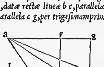
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Problema 11. Propositio 42.

Dato triangulo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo. 42

ORONTIVS. Sit datum a b c, triangulum, cui oporteat in angulo æquali ei qui ad d, æquum parallelogrammum constituere. Diuidatur itaque b c, latus bifariam in puncto e, per decimam propositionem: & connectatur a e, recta, per primum postulatum. Ad datam insuper lineam rectam e c, datúmque in ea punctum e, dato angulo rectilineo qui ad d, æqualis angulus recti lineus constituatur f e c: per uigesimamtertiam propositionem. Et per punctum a, datæ rectæ lineæ b c, parallela ducatur a g: atque per punctum c, ipsi e f, parallela c g, per trigesimamprimam propositionem. Et quoniam a b e, & a e c, triangula, in basibus sunt æqualibus b e, & e c, atque in eisdē parallelis a g, & b c, cōstituta: ipsa propterea sunt admuicē æqualia, per trigesimāoctauam propositionē. Triangulū igitur a b c, duplū est a e c, trianguli. Atqui parallelogrammū f e c g, eiusdē a e c, trianguli duplū est, per quadragesimāprimam propositionem: habent nanque eandem basin e c, in eis-

Constructio figuræ.



Ostensio problematis.

eiſdémque ſunt parallelis a g, & b c. Quæ autem eiuſdem ſunt duplicia, æqualia ſunt adinuicem, per ſextam communem ſententiam. Parallelogrammum ergo f e c g, æquū ipſi a b c, triangulo dato: ſuſcipitque angulum f e c, æqualem ei qui ad d. Dato itaque triangulo, æquale parallelogrammum conſtituitur, in dato angulo rectilineo. Quod faciendum erat.

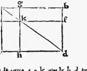
Θεώρημα λβ, Πρόθεσις μγ.

ΠΑντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Theorema 32, Propoſitio 43.

OMnis parallelogrammi eorum quæ circa dimetientem ſunt parallelogrammorum ſupplementa, ſibi inuicem ſunt æqualia.

ORONTIUS. *Parallelogramma circa dimetientem alicuius dicuntur eſſe parallelogrammi, quando eundem cum toto poſſident dimetientem. Supplementa autem, uocantur reliqua parallelogramma extra communem dimetientem cōſtituta. Sit igitur a b c d, parallelogrammū, cuius dimetiens a d, & circa ipſum dimetientem ſint e g, & h f, parallelogramma, ſupplementa uerò ſint e h, & g f: quæ dico fore adinuicem æqualia. Parallelogrammum enim a b c d, bifariã ſecatur à dimetiente a d, per trigeſimamquartam propoſitionem: igitur a b d, trianglum, æquum eſt ipſi triangulo a c d. Dimetiens inſuper a k, bifariam ſecat e g, parallelogrammum, necnon & k d, ipſum h f, per eandem trigeſimamquartam propoſitionem: æquum eſt igitur a e k, triangulū ipſi a g k: atque triangulum k h d, ipſi k f d, triangulo. Si autē æqualibus triangulis æqualia iungantur triangula: omnia erunt æqualia, per ſecundam communem ſententiam. Triangula itaque a e k, & k h d, triangulis a g k, & k f d, ſunt æqualia. Patuit autem, quòd & totum a b d, triangulum, toti triangulo a c d, itidem coæquatur. Porrò ſi ab æqualibus triangulis, æqualia ſubducantur triangula: quæ relinquentur æqualia erunt, per tertiam communem ſententiam. Subductis itaq; triãgulis a g k, & k f d, ab ipſo a b d, triangulo, atque a e k, & k h d, triangulis, ab ipſo triangulo a c d: relinquentur g f, & e h, ſupplementa adinuicē æqualia. Omnis ergo parallelogrammi, &c. ut in theoremate. Quod demonſtrare fuerat operæpretium.*



Parallelogrãma circa dimetientem. Supplemēta.

Πρόβλημα ιβ, Πρόθεσις μδ.

ΠΑρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Problema 12, Propoſitio 44.

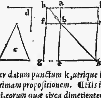
AD datam rectam lineam, dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtruere, in dato angulo rectilineo.

Problematis interpretatio.

ORONTIVS. ¶*Constituere parallelogrammum ad datam lineam rectã, & in dato angulo rectilineo, est ipsam lineam datam coassumere in latus eiusdem parallelogrammi: sic ut eadem linea cum altero adiacentium laterum, angulum comprehendat æqualem ipsi angulo dato.*

Constructio figuræ.

Esto igitur data linea recta a b, ad quam oporteat constituere parallelogrammum, dato triangulo c, æquale, & in angulo æquali ei qui ad d. Producatur in primis a b, recta in directum usque ad punctum e, per secundum postulatum: & ad datam rectam lineam b e, ad datúmque in ea punctum b, dato angulo rectilineo qui ad d æqualis angulus rectilineus constituatur f b e, per uigesimamtertiam propositionem. In ipso consequẽter angulo f b e, dato triangulo c, æquale construatur parallelogrammum f g e b, per quadragesimamsecundam propositionem: extendatúrque g f, in directum usque ad h, per secundum postulatum. Per datum insuper punctum a, utrique & f b, & g e, parallela ducatur h a, per trigesimamprimam propositionem: connectaturque per primum postulatum, dimetiens h b. Et quoniam in rectas g, e, & h b, recta incidens h g, interiores angulos & ad easdem partes g h b, & h g e, duobus rectis minores efficit (nempe minores ipsis g h a, & h g e, qui binis rectis per ultimam partem uigesimænonæ propositionis sunt æquales) concurrent ergo tandem g e, & h b, in infinitum ad partes b, & e, productæ, per quintum postulatum. Producantur igitur, per secundum postulatum, & concurrant in puncto k. Per idem rursum postulatum, extendantur f b, & h a, usque ad puncta l & m: & per datum punctum k, utrique h g, & a e, parallela ducatur k l, per trigesimã primam propositionem.



Demonstrationis resolutio.

¶*His ita constructis, quoniam h g k l, parallelogrammi, eorum quæ circa dimetientem h k, sunt parallelogrammorum supplementa, sibi inuicem sunt æqualia, per quadragesimamtertiam propositionem: æquũ est supplementum seu parallelogrammum a b m l, ipsi f b e g, parallelogrammo. Eidem porrò f b e g, parallelogrammo, æquum est datũ c, triangulum, per quadragesimamsecundam propositionem: ita enim constructum est. Igitur parallelogrammum a b m l, ipsi triangulo c, per primam communem sententiam coæquatur. Est autem & a b m, angulus, ei qui ad d, æqualis: uterque enim æquatur ipsi f b e, a b m quidem, per decimamquintam propositionem, qui ad d uerò, per uigesimamtertiam. Coassumitur præterea data linea recta a b, in latus ipsius a b l m, parallelogrammi. Ad datam igitur lineam rectam a b, dato triangulo c, æquale parallelogrammum construitur a b m l, in dato angulo rectilineo a b m, ei qui ad d, æquali. Quod facere oportebat.*

Πρόβλημα ιγ, Πρότασις με.

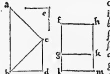
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Problema 13, Propositio 45.

DAto rectilineo, ęquale parallelogrammum cõstituere, in dato angulo rectilineo. 45

ORONTIVS. ¶ Sit datum rectilineum a b c d: cui oporteat construere æquale parallelogrammum, in dato angulo rectilineo qui ad e. Connectatur ergo b c, recta, per primum postulatum: & dato a b c, triangulo, æquale parallelogrammum constituatur f g h k, in dato angulo rectilineo f h k, ei qui ad e, æquali: per quadragesimamsecundam propositionem. Ad datam insuper rectam lineam g k, dato b c d, triangulo, æquum construatur parallelogrammum g k l m, in dato angulo rectilineo g k m, æquali eidem qui ad e: per antecedentem quadragesimamquartam propositionem. Ostendendum est itaque primũ, hæc duo parallelogramma unum efficere parallelogrammum: quod ita fit manifestum. Quoniam anguli f h k, & g k m, eidem angulo qui ad e, sunt æquales per cõstructionẽ: sũt igitur æquales adinuicẽ, per primam communem sententiã. Addatur utrique communis angulus g k h: igitur anguli g k h, & g k m, sunt per primam communem sententiam, æquales angulis f h k, & g k h. Eisdẽ porrò angulis f h k, & g k h, duo anguli recti sunt æquales, per ultimam partem uigesimænonæ propositionis: anguli igitur g k h, & g k m, binis sunt rectis æquales, per eandem primam communem sententiam. In directum est igitur g k, ipsi k m, per decimamquartam propositionem. Rursum quoniam angulus f g k, opposito qui ad h, per trigesimamquartam propositionem est æqualis: patuit autem quòd & g k m. Bini itaque anguli f g k, & g k m, eidem qui ad h, sunt æquales: & æquales propterea adinuicem, per primam communem sententiam.

Quòd cõstructa parallelogramma, vnum efficiãt parallelogrã mum.



Communis rursum addatur angulus k g l: erũt igitur f g k, & k g l, anguli, binis interioribus & ad easdem partes l g k, & g k m, per secundam communem sententiam æquales. Ipsis porrò l g k, & g k m, angulis, bini recti coæquantur, per eandem partem ultimam uigesimænonæ propositionis: per primam ergo comunẽ sentẽtiam, anguli f g k, & k g l, sunt æquales duobus rectis. In directum est itaque f g, ipsi g l, per ipsam decimamquartam propositionẽ. Est autẽ & f g, ipsi h k, atque g l, ipsi k m, per trigesimãquartã propositionẽ æqualis: & utraque utriq; parallela. Igitur f l, & h m, per secundam communem sententiam, sunt æquales adinuicem, atque parallelæ: & eas itaque cõiũgentes rectæ lineæ f h, & l m, æquales & parallelæ sunt, per trigesimamtertiam propositionem. Parallelogrammum est igitur f l h m. Huius autem pars f g h k, triangulo a b c, æquatur: & reliqua g k l m, ipsi triangulo b c d, per ipsam constructionem. Totum ergo f l h m, parallelogrammum ipsi dato a b c d, rectilineo, est æquale: suscipitque angulum f h m, æqualem dato qui ad e angulo. Dato itaque rectilineo a b c d, æquale construximus parallelogrammum f l h m, in dato angulo rectilineo qui ad e. Quod faciendum propo sueramus. ¶ Idem quoque licebit ostendere, ubi datum rectilineum, in plura duobus separabitur triangula. Cuilibet enim triangulo, peculiare construetur parallelogrammum, per quadragesimamsecundam & quadragesimamquartã propositionem: quæ simul unum efficere parallelogrammum ipsi dato rectilineo æquale, haud dissimili discursu conuincentur.

Demonstrationis resolutio.

Notandum.

Πρόβλημα ιδ, Πρόθεσις μϛ.

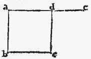
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Problema 14, Propositio 46.

EX data recta linea, quadratum describere.

ORONTIVS. ¶Esto data linea recta a b: ex qua sit operæpretiũ describere quadratũ. A dato itaque puncto a, ipsi rectæ lineæ a b, ad angulos rectos excitetur a c, per undecimã propositionẽ, indefinitæ quidẽ quantitatis, donec ipsam superet a b. A qua secetur æqualis eidẽ a b: sitque a d, per tertiam propositionẽ. Rursum per datũ punctũ d, ipsi a b, rectæ parallela ducatur d e: atque per punctũ b, ipsi a d, parallela b e, per trigesimãprimam propositionẽ. Parallelogrammum est igitur a b d e. dico quòd & quadratum. Nã parallelogrammorũ locorũ latera quæ ex opposito, æquantur adinuicẽ, per trigesimam quartã propositionẽ. Aequũ est igitur latus d e, ipsi a b: atque b e, ipsi a d. sut autẽ a b, & a d, per cõstructionem æquales. Quatuor igitur a b, a d, b e, & e d, latera, æqualia sũt adinuicẽ: quæ enim æqualibus sunt æqualia, & adinuicem æqualia sunt, per primã cõmunẽ sententiam. Aequilaterũ est igitur a b d e, parallelogrammũ. Rursum quoniã in parallelas a b, & d e, recta incidit a c, facit igitur interiores, & ad easdem partes angulos b a d, & a d e, binis rectis æquales, per ultimam partem uigesimænonæ propositionis. Rectus autẽ est qui ad a angulus: igitur & qui ad d, rectus. & qui ex opposito consistunt ad b & e, anguli, itidem recti sũt: per eandem trigesimamquartam propositionem. Rectangulum est igitur a b d e, parallelogrammum. Patuit quòd & æquilaterum: ergo quadratum, per trigesimam diffinitionem. Ex data igitur linea recta a b, quadratum descripsimus. Quod oportuit fecisse.

Quòd descriptum paralle logrammũ sit quadratum.



Corollarium.

¶Quæ ab æqualibus igitur lineis rectis quadrata describuntur, æqualia sunt adinuicem: & è diuerso. quæ autem ab inæqualibus fiunt quadrata, sunt inæqualia: maius quidem quod à maiore, minus autem quod a minore describitur.

Θεώρημα λγ, Πρόθεσις μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

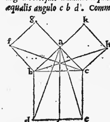
Theorema 33, Propositio 47.

IN rectangulis trangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendẽte fit, æquum est quadratis quæ fiunt ex lateribus angulum rectum continentibus.

ORONTIVS. ¶Sit rectangulum triangulum a b c, cuius sub b a, & a c, lateribus contentus angulus, rectus existat. Dico, quòd descriptũ ex b c, quadratum, iis quæ ex b a, & a c, fiunt quadratis, est æquale. Describantur ergo quadrata, per quadragesimamsextam propositionem: ex b c, quidem quadratum

dratum b c d e, ex a b uerò, a b f g, & ex ipso a c, quadratum a c h k. Deinde per a punctū, utrique b d, & c e, parallela ducatur a l: per trigesimamprimam propositionē. Parallelogramma igitur erunt b l, & c l, quadrangula. Connectantur denique a d, & c f, lineæ rectæ: per primum postulatum. Et quoniam ad rectam lineam a b, atque ad eius punctum a, duæ rectæ lineæ a c, & a g, non ad easdem partes ductæ, angulos utrobique rectos efficiunt (recti enim sunt, qui circa punctum a, consistunt anguli) in directum est igitur a c, ipsi a g: & a b, consequenter ipsi a k, per decimamquartā propositionē. Parallelæ itaque sunt b f, & c g: similiter & b k, atque c h. Cū porrò omnes anguli recti sint adinuicē æquales, per quartum postulatū: erit angulus a b f, æqualis angulo c b d. Communis apponatur angulus a b c: totus igitur a b d, toti f b c, angulo, per secūdam communē sententiam erit æqualis. Rursum quoniā per trigesimam diffinitionē, æqualis est a b, ipsi b f, atque b c, ipsi b d: sunt igitur bina latera a b, & b d, trianguli a b d, duobus lateribus f b, & b c, trianguli f b c, æqualia alterū alteri. & æquales continēt angulos a b d, & f b c. Basis ergo a d, basi f c, & triangulū a b d, triangulo f b c, per quartam æquatur propositionē. Ipsius porrò trianguli a b d, duplū est b l, parallelogrammū, in eadē basi b d, atque in eisdē parallelis a l, & d, constitutū: per quadragesimāprimam propositionē. & per eandē propositionē, a b f g, quadratū, duplū ipsius f b c, trianguli: habet enim eandē basim b f, in eisdéque cōsistūt parallelis f b, & g c. Quæ autē æqualiū duplicia sunt, & adinuicē sunt æqualia: per sextam cōmunē sententiam. Igitur b l, parallelogrammū, æquū est a b f g, quadrato. Haud dissimili uia, ostēdetur c l, parallelogrammū, æquū esse a c h k, parallelogrammo, siue quadrato. Connexis enim a e, & b h, lineis rectis, per primum postulatū: erunt rursum a c e, & b c h, triangula adinuicem æqualia. Et cūm c l, parallelogrammum duplum sit a c e, trianguli, & quadratum a c h k, ipsius b c h, trianguli itidē duplum, per eandem quadragesimamprimam propositionē: concludetur tandē parallelogrammū c l, æquari quadrato a c h k. Atqui b l, & c l, parallelogramma, conficiunt quadratum b c d e, quod fit ex b c: quadratum ergo b c d e, æquum est a b f g, & a c h k, descriptis ex a b, & a c, quadratis. In rectangulis itaque triangulis, & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod expediebat demonstrare.

Alterius partis demōstratio.



Reliquæ partis ostensio.

Notandum.

¶Hoc spectabile & semper admirandum theorema, Pythagoras in his fertur offēdisse numeris, 3, 4, 5: uelut ex obiecta potes dicere figura, in qua angulus qui ad b, rectus est: & qualium partium a b, latus est trium, & b c, quatuor, talium a c, rectum subtendens angulū 5 reperitur. Quinquies porrò 5, faciunt 25: ter 3, uerò 9, & quater 4, sedecim: atqui 9 & 16 conficiunt 25.



Corollarium.

In triangulis itaque rectangulis, duobus lateribus datis, ipsorum adminiculo, deuenire licebit in cognitionem reliqui: per quadratorum nempe tum additionem, tum subductionem adinuicem, & lateris seu radicis corundem inuestigationem. Nam cognitis (uerbi gratia) a b, & a c, lateribus, utrunque in sese multiplicetur, & quadratū ipsius a b, a quadrato ipsius a c, subducatur: relinquetur enim quadratum quod fit ex b c, cuius radix quadrata ostendet ipsius b c, lōgitudinem. Haud dissimiliter cognitis b c, & a c, lateribus: cognoscitur ipsius a b, longitudo. Subductis enim 9 à 25, relinquentur 16: quorum radix est 4. Atque subtractis 16 a 25, relinquentur 9: quorum radix est 3. Idem uelim habeas indicium, de cæteris quibuscunque similibus. Quemadmodum in dimetiendis rerum longitudinibus, passim obseruari comprobabis.

Θεώρημα λδ', Πρόθεσις μη.

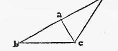
Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

Theorema 34, Propositio 48.

Cōuersa præcedentis. 48

SI trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus quadratis: angulus cōprehēsus sub reliquis triāguli duobus lateribus, rectus erit.

ORONTIVS. *Esto a b c, trianguli, quod ex b c, quadratum, æquū eis quæ ex a b, & a c, lateribus fiunt quadratis: aio propterea, angulum: b a c, fore rectum. A dato enim puncto a, datæ lineæ a c, perpendicularis excitetur a d: per undecimam propositionem. Et per tertiam propositionē, ponatur a d, ipsi a b, æqualis: connectatúrque c d, recta, per primum postulatum. Cùm igitur a b, ipsi a d, sit æqualis: æquū est quòd ex a b, quadratum, ei quod fit ex a d, per corollarium quadragesimæsextæ propositionis. Addatur utriq; id quod ex a c, quadratum. Quæ ex a b, igitur & a c, quadrata, æqualia sūt eis quæ ex a c, & a d, quadratis: per secundam communem sententiam. Eis autem quæ ex a c, & a d, quadratis, æquum est, quòd ex c d, per antecedentem quadragesimamseptimā propositionē: angulus enim c a d, rectus est. Quadratis porrò quæ ex a b, & a c, æquum est quod ex b c, quadratum: per hypothesin. Quæ autem æqualibus sunt æqualia, ea sunt æqualia adinuicem, per primam communem sententiam. Quadratum igitur quod ex b c, æquum est ei quod ex c d, quadrato. Aequalis est ergo b c, ipsi c d: æqualia enim quadrata sunt, quæ ab æqualibus describuntur lineis rectis. Posita est autem a d, ipsi a b, æqualis, & a c, utrique communis. Bina ergo latera a b, & a c, trianguli a b c, binis lateribus a c, & a d, trianguli a c d, sunt alternatim æqualia: basis quoque b c, basi c d, æqualis: Angulus igitur b a c, angulo c a d, per octauam propositionem est æqualis.*



Est

Est autem c a d, angulus rectus, per constructionem: & b a c igitur angulus rectus est. Si trianguli itaque quod ab uno laterum fit quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur quadratis: angulus comprehensus sub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus erit. Quod tandem ostendendum susceperamus.

PRIMI LIBRI GEOMETRICORUM ELEMENTORUM FINIS.

Orontij Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, in Secundum elementorum Euclidis, Demonstrationes.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον.

Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

Parallelogrammum rectangulum.

1 Omne parallelogrammum rectangulum, sub duabus rectum angulum comprehendentibus rectis lineis, dicitur contineri.

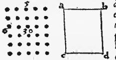
ORONTIVS. ¶Parallelogrammum, dicitur figura quadrilatera, sub oppositis lateribus adinuicem æqualibus comprehensa. Sunt autem parallelogrammorum quatuor tantummodo genera: utpote, quadratum, altera parte longius, rhombus, & rhomboides: quemadmodum trigesimatertia primi libri ante monuimus diffinitione. Vtrunque porrò & quadratū & altera parte longius, rectangulum appellatur: continetúrque sub duabus lineis rectis, ad rectum conuenientibus angulum, quarum altera in reliquam abstracti.

Quid parallelogrammū.

Quot parallelogrammorum genera.

Exemplum.

ſtractiuè ducta, ipſum efficit parallelogrãmũ. ℂ Vt ex a b c d, potes elicere parallelogrammo, quod ſub a b, & a c, lateribus, rectum qui ad a comprehẽdentibus angulum, continetur.



Non poteſt enim angulus qui ad a, fore rectus, quin per uigeſimamnonam & trigeſimamquartã propoſitionẽ libri primi, reliqui tres anguli ſint, itidem recti. Imaginanda eſt igitur a b, recta, fluere directa uia in c: & punctum b, deſcribere latus b d. uel a c, rectam, uenire recto fluxu in b: atque punctum c, efficere latus c d. Ita enim abſtractiuè deſcribuntur parallelogrãmma rectangula. Ad quorum ſimilitudinem, numerus per alium quemuis numerum multiplicatus, planum atque rectangulum efficit, numerum: uti ſubiecta uidetur indicare figura, in qua 6 unitates per 5 multiplicatæ, reddunt 30, planum & rectangulum numerum.

Corollarium.

ℂ Quemadmodum igitur æquales numeri per numeros æquales multiplicati, æquales inuicem procreant numeros: haud diſſimiliter ſub æqualibus rectis cõprehenſa rectangula, æqualia ſunt adinuicem.

Γνώμων τί.

ΠΑντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

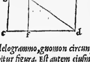
Quid gnomon.

OMnis parallelogrammi, loci eorum quæ circa dimetiẽtem illius ſunt parallelogrammorũ, vnũquodque eorũ cum binis ſupplementis, gnomon vocetur. 2

ORONTIVS. ℂ Quanquàm gnomon, propriè intelligamus rectangulum: accipitur tamẽ ſuprà ſcripta gnomonis diffinitio, pro quacũq; figura ex duobus cuiuſuis oblati parallelogrãmi ſupplemẽtis, & altero eorum quæ circa dimetientem illius ſunt parallelogrammorum comprehenſa. Diximus autem quadrageſimatertia propoſitione primi libri, quænam ſint parallelogramma circa dimetientem alicuius conſiſtentia parallelogrammi: quæ item ſint eorundem parallelogrammorum ſupplementa. ℂ Sit igitur a b c d, parallelogrammum, & illius dimetiens a d: circa uerò dimetientem cõſiſtant g e, & f b, parallelogramma, atque illorum ſupplementa g f, & e b. Dico itaque g e, parallelogrammum, unà cum binis ſupplementis g f, & e b: gnomonem efficere f g e b, ſeu f a b. Cui ſi addatur f b, parallelogrammum, totum integrabitur a b c d: aut ſi eidem f b, parallelogrammo, gnomon circunponatur f g e b, non mutabitur, ſed augmentabitur figura. Eſt autem eiuſmodi gnomonũ tradita deſcriptio, in partiũ oblatorum in demonſtrationibus parallelogrammorum expeditiorem expreſſionem, principaliter excogitata.

Vide 43. primi.

Gnomonis exemplum.



Cur tales aſſumpti gnomones.

Θεώ,

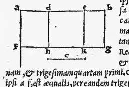
Θεώρημα α, Πρόθεσις α.

1 Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν, εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Theorema 1, Propositio 1.

Si fuerint binæ lineæ, feceturque ipſarum altera, in quotcũque ſegmenta: rectangulum comprehenſum ſub duabus rectis lineis, æquum eſt eis quæ ab inſecta & quolibet ſegmento rectangulis comprehenduntur.

ORONTIVS. ¶ *Sint binæ rectæ lineæ a b, & c, quarum altera, utpote a b, ſecetur in quotcunque, utpote in a d, d e, & e b, ſegmenta. Aio quòd ſub a b, & ipſa c, comprehenſum rectangulum: æquũ eſt eis, quæ ſub c, & a d, & d e, atque e b, cõprehenduntur rectangulis. A dato enim pũcto a, datæ rectæ lineæ a b, recta quædam linea, per undecimam primi libri propoſitionem, ad rectos excitetur angulos, excedens datam lineam c: à qua ſecetur æqualis eidem c, per tertiam eiuſdem primi, ſitque a f. Per datum inſuper punctum f, ipſi a b, parallela ducatur f g: atque per ipſa b, d, & e, puncta, ipſi a b, parallelæ ducantur b g, d h, & e k, per trigeſimamprimam ipſius primi, quæ per trigeſimamquartam eiuſdem primi parallelæ erut adinuicem.*



Rectangula igitur ſunt, a b f g, a h, d k, & e g, parallelogramma: per uigeſimamnonam, & trigeſimamquartam primi. Quælibet inſuper & b g, & d h, & e k, ipſi a f, eſt æqualis, per eandem trigeſimamquartam primi: eidem quoque a f, eſt æqualis c. Omnes igitur adinuicem, atque ipſi c, ſunt æquales: per primam communem ſententiam. Quod igitur ſub c & a d, continetur rectangulum, æquum eſt ipſi a h: & quod ſub c, & d e, ipſi d k: atque id quod ſub eadẽ c & e b, ipſi e g, rectangulo æquale. Sub æqualibus enim rectis lineis, æqualia cõprehenduntur rectangula: per corollarium primæ diffinitionis huius ſecundi libri. Ipſis porrò a h, d k, & e g, rectangulis, æquum eſt a b f g, rectangulum (nempe totum ſuis partibus integralibus ſimul ſumptis.) Quæ igitur ſub c, & a d, d e, atque e b, ſegmentis continentur rectangula, æqualia ſunt (per primam communem ſententiam) ipſi a b f g, rectangulo. Eidem rurſum a b f g, rectangulo, æquum eſt id quod ſub a b, & c, continentur: comprehenditur enim ſub a b, & a f, quæ ipſi c, data eſt æqualis. Quæ autem eidem ſunt æqualia, ea ſunt æqualia adinuicem: per primam communem ſententiam. Quod igitur ſub datis rectis lineis a b, & c, continetur rectangulum, æquum eſt eis quæ ſub inſecta c, & quolibet ipſius a b, ſegmento comprehenduntur rectangulis. Quod oportebat demonſtrare.

Ex hac propoſitione numerorum ab Arithmeticis tradita colligitur multiplicatio.

Θεώρημα β, Πρότασις β.

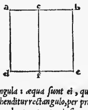
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Theorema 2. Propositio 2.

SI recta linea secetur vtcunque: quæ sub tota & quolibet segmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia sunt ei quod ex tota est quadrato.

Quid rectã lineam vtcunque secari.

ORONTIVS. *Recta linea utcunque secari dicitur, quæ in quouis dato illius puncto, absque partium determinata ratione, indifferenter diuiditur. Sit igitur a b, linea recta, quæ utcunque secetur in c. Dico quòd sub a b, & a c, atque sub eadem a b, & c b, comprehensa rectangula: æqua sunt ei, quod ex tota a b, fit quadrato. Ex data nanque a b, quadratum describatur a b d e: per quadragesimamsextam primi. Et per datum punctum c, utrique & a d, & b e, parallela ducatur c f: per quadragesimamprimam eiusdem primi libri propositionem. Rectangula igitur sunt, a f, & c e, parallelogramma: atque ipsum a f, sub a d, & a c: ipsum uerò c e, sub c b, & b e, per primam huius diffinitionem comprehensum. Et quoniam a b, & a d, sunt binæ quædam lineæ rectæ: & ipsarum altera, scilicet a b, secta est in a c, & c b, segmenta, ex hypothesi. Quæ igitur ab insecta a d, & utroque segmento a c, & c b, continentur rectangula: æqua sunt ei, quod sub duabus lineis rectis a b, & a d, comprehenditur rectangulo, per primam huius secundi propositionem. Atqui b e, ipsi a d, & utraque ipsi a b, per trigesimam diffinitionem primi est æqualis: & sub æqualibus rectis æqualia continentur rectangula. Est insuper a b d e, rectangulum, id quod ex ipsa a b, fit quadratum. Quæ sub tota igitur a b, & quolibet segmento a c, & c b, rectangula comprehenduntur: æqualia sunt ei quod ex tota a b, est quadrato. Quod erat ostendendum.*



Θεώρημα γ, Πρότασις γ.

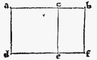
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Theorema 3, Propositio 3.

SI recta linea secetur vtcunque: rectangulum sub tota & vno segmentorum comprehensum, æquum est ei quod sub segmentis comprehenditur rectãgulo, & ei quod ex prædicto segmento fit quadrato.

ORON-

ORONTIVS. Esto a b, recta linea, utcunque secta in puncto c. Aio quòd sub tota a b, & altero segmentorum, utpote a c, comprehensum rectangulum: æquum est ei quod sub a c, & c b, segmentis rectangulo continetur, & ei quod ex eodem segmento a c fit quadrato. Describatur enim ex a c, quadratum a c d e: per quadragesimamsextam primi: & producatur d e, in directum usque ad f, per secundum postulatũ. Per punctum denique b, utrique a d, & c e, parallela ducatur b f, per trigesimamprimam ipsius primi. Rectangula igitur sunt a e, & c f, parallelogramma, per primam huius diffinitionem. Et quoniam a b, & a d, binæ quædam uidentur esse lineæ rectæ, quarum altera, utpote a b, secta est per hypothesin in a c, & c b, segmenta. Sub duabus igitur lineis rectis a b, & a d, comprehensum rectangulum a f: æquum est eis quæ ab insecta a d, & quolibet segmẽto a e, & c b, continentur rectangulis, per primam huius secũdi propositionem, hoc est, rectangulis a e, & e f. Atqui a f, rectangulo, æquũ est id quod sub tota a b, & segmento a c, continetur: nam a d, ipsi a c, est æqualis, per trigesimam diffinitionem primi. A c, porrò quadratum, quod ex eodem segmẽto a c, describitur. Rectangulo denique c f, æquum est id quod sub a c, & c b, segmentis continetur: est enim c e, eidem a c, per ipsius quadrati diffinitionem æqualis. Quod igitur sub tota a b, & altero segmẽtorum, utpote a c, comprehenditur rectangulum: æquũ est ei quod sub a c, & c b, segmentis fit rectangulo, & ei quod ex prædicto segmento a c, est quadrato. Si recta igitur linea secetur utcunque: & quæ sequuntur reliqua, ut in theoremate. Quod ostendere oportebat.



Θεώρημα δ, Πρότασις δ.

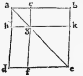
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Theorema 4, Propositio 4.

SI recta linea secetur vtcunque: quadratum quod fit ex tota, æquum est quadratis quæ fiunt ex segmẽtis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.

ORONTIVS. Sit a b, linea recta, quæ secetur utcũque in puncto c. Dico quadratum quod ex tota fit a b, æquum esse eis quæ ex a c, & c b, segmẽtis describuntur quadratis, & bis sub eisdem segmentis comprehenso rectangulo. Describatur in primis ex a b, quadratũ a b d e, per quadragesimamsextã primi. Et connectatur a e, dimetiens, per primum postulatum: & per datum punctum c, utrique a d, & b e, parallela ducatur c f, secans a e, dimetientẽ in puncto g. Per punctum denique g, ipsis a b, & d e, parallela ducatur h k, per trigesimamprimam eiusdem primi. Cùm igitur a b d e, sit quadratum,

æqualis est a b, ipsi b e, per trigesimam ipsius primi diffinitionem. Isoscelis igitur a b e, trianguli, qui ad basin a e, sũt anguli, hoc est, b a e, & a e b, sunt per quintã primi adinuicẽ æquales. Eiusdẽ porrò trianguli a b e, tres anguli, binis sunt rectis æquales: per trigesimamsecundam eiusdẽ primi. Rectus est autẽ angulus qui ad b. reliqui igitur anguli b a e, & a e b, uni recto sunt æquales. sunt autẽ & æquales adinuicẽ: uterque igitur dimidiũ est anguli recti. Trianguli rursum a c g, tres anguli, duobus rectis, per eandẽ trigesimamsecũdam primi, coæquantur. angulus porrò a c g, rectus est: nempe æqualis interiori, & ad easdẽ partes qui ad b, per uigesimanonã ipsius primi. Ergo reliqui duo anguli c a g, & a g c, uni recto sunt æquales. sed angulus c a g, dimidio recti æqualis præostẽsus est: & a g c, igitur angulus, recti itidẽ est dimidius. Aequus est propterea angulus c a g, ipsi a g c: per primam communẽ sententiã. Et latus cõsequẽter a c, lateri c g, per sextam primi æquale. Est autẽ & a b, latus, ipsi c g, necnon b g, ipsi a c, æquale: per trigesimamquartam eiusdẽ primi. Aequilateru est itaque a c g b, parallelogrammũ. Aio quòd & rectangulũ: nam angulus qui ad a, rectus est. Rectangulũ porrò sub duabus rectis lineis angulũ rectũ cõprehendentibus, per primam huius diffinitionẽ, contineri dicitur. Quadratũ est igitur a c g b: & æquum ei quod ex a c. Haud dissimili discursu, f k, parallelogrammũ, quadratũ esse conuincetur: & æquale ei quod ex c b. Nam æqualis est g k, eidẽ a c, per eandẽ trigesimamquartam primi. Et quoniam æquum est h f, supplementum ipsi c k, per quadragesimãtertiam primi: & eidẽ c k, id quod sub a c, & c b, cõtinetur æquale (nam a c, ostensa est æqualis ipsi c g) & proinde æquale ipsi h f. Rectangulis igitur c k, & h f, æquum est id quod bis sub segmentis a c, & c b, comprehenditur rectangulum. Ostensum est autem quæ ab eisdem segmentis fiunt quadrata, ipsis a g, & g c, quadratis fore æqualia. Quæ igitur ex a c, & c b, segmentis fiunt quadrata, & id quod bis sub eisdem segmentis comprehenditur rectangulum: ipsis a g, g e, c k, & h f, sunt æqualia. Eisdem porrò a g, g e, c k, & h f, æquum est quadratum a b d e, ex ipsa a b, descriptũ: nempe totũ suis partibus integralibus. Quod igitur ex tota a b, fit quadratũ, æquum est quadratis quæ fiunt ex a c, & c b, segmentis, & ei quod bis sub eisdem segmentis comprehenditur rectangulo. Quod fuerat demonstrandum.



Hoc theorema, à nonnullis aliter demonstratur: sed hæc demõstratio est omnium clarissima.

Corollarium.

Parallelogramma igitur, quæ circa quadrati dimetientem consistunt, fore itidem quadrata, relinquitur manifestum.

Θεώρημα ε, Πρόθεσις ε.

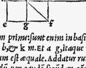
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Theo-

Theorema 5, Propositio 5.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia, rectangulum comprehensum ab inæqualibus sectionibus totius, vnà cum quadrato quod à medio sectionum, æquum est ei quod à dimidia fit quadrato.

ORONTIVS. ¶ *Sit rursum a b, linea recta: quæ bifariam secetur in pũcto c, atque in nõ æqualia, in pũcto d. Aio quòd sub a d, & d b, cõprehensum rectangulũ, unà cũ eo quod ex d c, quadrato: æquũ est ei, quod ex a c, dimidia fit quadrato. Describatur ergo ex a c, quadratũ a c e f, per quadragesimam sextã primi, & cõnectatur dimetiẽs a f, per primũ postulatũ, per punctũ insuper d, utrique a e, & c f, parallela ducatur d g, secans a f, dimetientẽ in pũcto h. Rursum per datũ punctũ h, ducatur k l m, ipsis a b, & e f, parallela: per trigesimãprimam ipsius primi. tandẽ per punctũ b, ipsis a k: & c f, parallela ducatur b m: per eandẽ trigesimamprimam primi.* (Constructio figuræ.) *His itaque cõstructis, quoniam supplemẽtum g k, æquũ est supplemẽto d l, per quadragesimamtertiam ipsius primi: addatur cõmune a h. totum ergo a g, rectangulũ, toti a l, rectangulo, per secũdam cõmunẽ sentẽtiam erit æquale. At c m, rectangulũ, eidẽ a l, est æquale, per trigesimamsextam primi: sunt enim in basibus æqualibus a c, & c b, & in eisdẽ parallelis a b, & k m. Et a g, itaque rectangulũ, ipsi c m, per primam cõmunem sententiam est æquale. Addatur rursum cõmune rectangulũ d l: & d m, igitur rectangulũ, per eandẽ secũdam cõmunem sentẽtiam, æquabitur gnomoni g a l. Atqui d m, rectangulo, æquũ est id quod sub a d, & d b, cõtinetur: quadratũ est enim b, per corollarium quartæ propositionis huius: & æqualis propterea a d, ipsi a d b, sub qua & d b, ipsum d m, cõprehẽditur rectagulũ. Quod igitur sub a d, & d b, cõtinetur rectangulum, æquum est per primam cõmunẽ sentẽtiam gnomoni g a l. Addatur tandẽ ei quod sub a d, & d b, cõtinetur rectangulo, quadratum quod fit ex d c, & ipsi gnomoni g a l, quadratũ h f, ei quod ex d c, fit æquale (fit enim ex h l, quæ ipsi d c, per trigesimamquartam primi est æqualis.) Cõprehensum igitur sub a d, & d b, rectangulum, unà cum quadrato quod ex c d, æquum est per primam communem sentẽtiam gnomoni g a l, atque ipsi quadrato h f. Ipsis demum g a l, gnomoni, & quadrato h f, æquũ est a c e f, quod à dimidia a c, descriptum est quadratum. Quod igitur sub a d, & d b, inæqualibus sectionibus continetur rectangulum, unà cum quadrato, quod à medio sectionum d c: æquum est, per primam communem sentẽtiam, ei quod ex a b, dimidia fit quadrato. Si recta igitur linea, & quæ sequuntur reliqua: ut in theoremate. Quod ostendendum suscepramus.* (Demonstratio theorematis.)



Θεώρημα ς, Πρόθεσις ς.

ΕΑν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης

περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

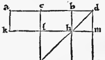
Theorema 6, Propoſitio 6.

SI recta linea bifariam ſecetur, adiiciatúrque ei aliqua recta linea in rectum: rectangulum comprehenſum ſub tota cum appoſita & appoſita, vnà cum quadrato quod fit à dimidia, æqūū eſt ei quod ex coniecta ex dimidia & appoſita, tanquam ex vna deſcripto quadrato. 6

ORONTIVS. ¶*Eſto a b, recta linea, ſecta bifariam in puncto c: cui recta quædam linea b d, in directum adiiciatur. Dico, quod ſub a d, & d b, comprehenſum rectangulum, unà cum eo quod ex c b, quadrato: æquum eſt quadrato quod ex c d. Fiat enim ex c d, quadratum c d e f, per quadrageſimamſextam primi: & connectatur e d, per primum poſtulatum. Per punctum inſuper b, utrique c e, & d f, per trigeſimamprimam eiuſdem primi, parallela ducatur b g, quæ ſecet dimetientem e d, in puncto h. Rurſum per punctum h, ducatur k l m, ipſis a d, & e f, parallela: necnon per a punctũ, utrique c l, & d m, parallela a k, per eandẽ trigeſimamprimam primi. Cùm igitur a c, æqualis ſit ipſi c b, per hypotheſin, & a d, ipſi k m, parallela: æquum eſt a l, parallelogrammũ, ipſi c h, parallelogrãmo, per trigeſimãſextam primi. Eidem porrò c h, æquũ eſt h f, ſupplementũ: per quadrageſimamtertiã eiuſdẽ primi. Et a l, igitur ipſi h f, per primã communem ſententiam eſt æquale. Addatur utrique æqualium, commune rectangulum c m: totum igitur a m, rectangulũ, gnomoni l d g, per ſecundam communem ſentẽtiam æquabitur. Atqui a m, rectãgulo, æquum eſt*

Figuræ compoſitio.

Oſtenſionis deductio.



id quod ſub a d, & d b, comprehenditur rectangulum: continetur enim ſub a d, & d m, quæ eſt æqualis ipſi d b, nam b m, quadratum eſt, per corollarium quartæ huius ſecundi. Comprehenſum igitur ſub a d, & d b, rectangulum, æquum eſt gnomoni l d g. Addatur rurſum ei quod ſub a d, & d b, continetur rectangulo, quadratum quod ex b c: ipſi porrò gnomoni l d g, quadratum l g, ei quod ex b c, fit æquale (nam b c ipſi, b l, per trigeſimamquartam primi eſt æqualis, & ipſum l g (per corollarium quartæ huius) quadratum. Quod igitur ſub a d, & d b, continetur rectangulum, unà cum eo quod ex b c fit quadrato: æquum eſt gnomoni l d g, & ipſi quadrato l g. Eiſdem porrò gnomoni l d g, & quadrato l g: æquum eſt c d e f, quadratum. Rectangulum igitur ſub a d, hoc eſt ſub tota a b, cum adpoſita b d, & ipſa b d, adpoſita comprehẽſum, unà cum quadrato quod fit à dimidia c b: æquum ei eſt quod fit ex c d, hoc eſt ex dimidia c b, & adpoſita b d, tanquam ex una deſcripto quadrato. Quod demonſtrare fuerat operæprecium.

Θεώρ.

Θεώρημα ζ. Πρόθεσις ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ τμήματος τετραγώνῳ.

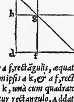
Theorema 7, Propositio 7.

SI recta linea secetur vtcunque: quod à tota & ab vno segmentorum vtraque fiunt quadrata: equalia sunt rectangulo comprehenso bis sub tota & dicto segmento, & ei quod à reliquo segmento fit quadrato.

ORONTIVS. ¶Data enim recta linea a b, utcunque secetur in puncto c. Aio ex tota a b, & uno segmentorum, utpote a c, utraque descripta quadrata: æqualia fore ei quod bis sub a b, & a c, continetur rectãgulo, & ei quod ex c b, fit quadrato. Ex ipsa enim a b, describatur quadratum a b d e, per quadragesimamsextam primi: & connectatur a e, dimetiens, per primum postulatum. Per punctum deinde c, ducatur c f, ipsis a d, & b e, parallela, secans a e, dimetientem in g: & per idem punctum g, utrique a b, & d e, parallela rursum ducatur h k, per trigesimamprimam primi. Erunt igitur h c, & f k, parallelogramma, circa dimetientem a e consistẽtia, quadrata: per quartæ huius corollarium. Et quoniam c k, & h f, supplementa, sunt per quadragesimamtertiam ipsius primi adinuicem æqualia: addatur utrique, commune quadratum h c. Totum igitur rectangulum a k, toti a f, per secundam communem sententiam erit æquale. Est autem ipsi a k, æquum id quod sub tota a b, & segmento a c, continetur rectangulo: nam a c, ipsi a b, per quadrati diffinitionem est æqualis. Rectangulis itaque a k, & a f, æquum est id quod bis sub a b, & a c, continetur rectangulum. Eisdem porrò a k, & a f, rectãgulis, æquatur gnomõ f a k, & quadratũ insuper h c (bis enim cum ipsis a k, & a f, rectangulis, includitur quadratum h c) gnomon igitur f a k, unà cum quadrato h c, æqualis est ei quod bis sub a b, & a c, comprehẽditur rectangulo. Addatur insuper ei quod sub a b, & a c, cõtinetur rectangulo, quadratum quod ex c b: eisdem porrò gnomoni f a k, & quadrato h c, quadratum f k, ei quod ex c b, fit æquale: nam c b, & g k, æquales sunt adinuicẽ, per trigesimamquartam primi. Quod igitur sub a b, & a c, bis cõprehenditur rectangulum, unà cum eo quod ex c b, fit quadrato, æquum est gnomoni f a k, & ipsis f k, & h c, quadratis. Ipsis porrò gnomoni f a k, & quadrato f k: æquum est quadratum a b d e, nempe totum suis partibus integralibus. Est autem a b d e, quadratum, id quod ex tota a b, descriptum est: & h c, id quod sub a c, segmento. Quod igitur ex tota a b, & segmento a c, utraque fiunt quadrata: æqualia sunt rectangulo comprehenso bis sub tota a b,

Figuræ præparatio.

Demonstratio theorematis.

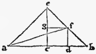


Vt construẽda figura.

ex a e,& e d,fiunt quadratorum. A dato enim puncto c, datæ rectæ lineæ a b, recta linea c e, ad rectos excitetur angulos, per undecimam primi: & utrique ipsarum a c,& c b, ponatur æqualis, per tertiam eiusdem primi. Cõnectantur deinde a e,& e b, per primum postulatum. Per punctum insuper d, ipsi c e, ducatur parallela d f: atque per punctum f, ipsi a b, parallela ducatur f g, per trigesimamprimam ipsius primi. connectatur tandem a f, per idem primũ postulatũ.

Primus demõstrationis progressus.

Cũm igitur a c, sit æqualis ipsi c e: erit per quintam primi, angulus c a e, æqualis angulo a e c. Et quoniã trianguli a e c, tres anguli sunt æquales duobus rectis, per trigesimamsecundam ipsius primi, rectus est autem, qui qui ad c: reliqui igitur anguli c a e,& a e c, uni recto sunt æquales. sunt autem æquales adinuicem, uterque igitur c a e,& a e c, recti dimidius est. Et proinde uterque eorum qui ad basin e b, isosceles e c b, dimidius est recti. Itaque totus a e b, angulus, rectus est. Rursum, quoniam e g f, trianguli tres anguli, binis rectis sunt æquales, per eandem trigesimamsecũdam primi. rectus est autem qui ad g: nam æqualis interiori & opposito ad easdẽ partes, qui ad c, per uigesimamnonam primi. dimidius item recti est, qui sub g e f. Reliquus igitur qui sub e f g, recti itidẽ est dimidius. Ambo igitur eidẽ, utpote dimidio unius recti, sunt æquales: & æquales propterea adinuicem, per primam communem sententiam. Et latus cõsequenter e g, lateri g f, æquale, per sextam primi. Haud dissimili uia, latus f d, lateri d b, concluditur æquale.



Secundus & principalis processus demonstrationis.

His ita præostensis, quoniam a c, æqualis est ipsi c e: æquum est quadratum quod fit ex a c, ei quod ex c e, fit quadrato: per corollarium quadragesimæsextæ ipsius primi. Eis porrò quæ ex a c,& c e, fiunt quadratis, æquum est quod ex a e, describitur, per quadragesimamseptimam eiusdem primi: & propterea duplum eius quod fit ex a c. quod enim binis æqualibus est æquale, alterutrius æqualium duplum est. Item quoniam æqualis est e g, ipsi g f: æquum est rursum per idem corollarium, descriptum ex e g, quadratũ, ei quod fit ex g f. Eisdem porrò quadratis quæ ex e g,& g f, æquũ est quod fit ex e f, per eandem penultimam primi. Duplum est igitur, quod ex e f, quadratũ, eius quod ex g f, describitur. Atqui g f, ipsi c d, est æqualis, per trigesimamquartam primi: & ab æqualibus rectis, æqualia describuntur quadrata, per corollariũ ipsius quadragesimæsextæ primi libri. Quod igitur ex e f, quadratũ, duplum est eius quod fit ex c d. Ostẽsum est autem, descriptum ex a e, quadratum, duplum fore eius quod ex a c. Descripta igitur ex a e,& e f, quadrata, dupla sunt eorum, quæ ex a c,& c d, fiunt quadratorum. Eis porrò quæ ex a e,& e f, quadratis, æquum est id quod ex a f, describitur, per quadragesimamseptimam primi: rectus est enim angulus a e f. Descriptum igitur ex a f, quadratum, duplum est eorum quæ ex a c,& c d, fiunt quadratorũ. Ei rursum quod ex a f, describitur quadrato, æqua sunt quæ ex a d,& d f, quadrata, per eandem quadragesimamseptimam primi: rectus est enim angulus qui ad d, per uigesimamnonam ipsius primi. Quæ igitur ex a d,& d f, utraque quadrata, dupla sunt eorum quæ ex a c, & c d fiunt quadratorum:

dratorum: nam æqualia eorundem duplicia sunt, per conuersionem sextæ communis sententiæ. Atqui d f, æqualis est ipsi d b, & ab æqualibus lineis, æqualia describuntur quadrata, per allegatum quadragesimæsextæ primi corollarium. Descripta igitur ex a d, & d b, quadrata, eorum quæ ex a c, & c d, fiunt quadratorũ dupla sunt. Si recta igitur linea, &c. ut in theoremate. Quod ostendendum susceperamus.

Θεώρημα ι, Πρόθεσις ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Theorema 10, Propositio 10.

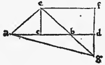
SI recta linea secetur bifariam, apponatur autem ei quępiam recta linea in rectum: quod ex tota cum apposita, & quod ex apposita vtraque quadrata, dupla sunt eius quod ex dimidia, & eius quod ex adiacente dimidia & adiuncta, tanquam ex vna descriptorum quadratorum.

ORONTIVS. *Data enim a b, recta linea, bifariam secetur in c, addatúrque ei in directum recta quædam linea b d. Aio quòd ex a d, & b d, vtraque quadrata, dupla sunt eorum quæ ex a c, & c d, fiunt quadratorum. Excitetur enim per undecimam primi, à puncto c, datæ rectæ lineæ a d, ad angulos rectos c e: ponatúrque utrique a c, & c b, æqualis, per tertiã ipsius primi: connectantur deinde a e, & e b, per primum postulatum. Et per e punctum, ipsi a d, parallela ducatur e f: necnon & per punctum d, ipsi c e, parallela d f, per trigesimamprimam eiusdem primi. In parallelas igitur c e, & d f, recta linea incidens e f, interiores & ad easdem partes angulos c e f, & e f d, binis rectis per uigesimãnonam primi, efficit æquales. Atqui b e f, angulus, minor est ipso c e f: duo itaque anguli b e f, & e f d, à recta e f, in b e, & d f, rectas incidente causati, binis rectis sunt minores. Productæ igitur e b, & f d, ad partes b, d, tandem concurrent, per quintum postulatum. Producantur igitur, per secundum postulatum, & conueniant in puncto g: & cõnectatur a g, per primum postulatum. Cùm igitur a c, sit æqualis ipsi c e: erit per quintam primi angulus c a e, æqualis angulo a e c. Et quoniam triãguli a e c, tres anguli, binis sunt rectis æquales, per trigesimamsecundam primi: rectus est autem qui ad c. Reliqui igitur c a e, & a e c, anguli, uni recto sunt æquales: qui cùm sint æquales adinuicem, uterque dimidius est recti. Et uterque propterea c e b, & e b c, qui ad basim e b, isoscelis e c b, recti dimidius est. Ergo totus a e b angulus, est rectus. Insuper, quoniam per trigesimamsecundam primi, trianguli b d g, tres anguli, sunt æquales duobus*

Constructio figuræ.

Discursus partium constructarum.

rectis: rectus autem est qui ad d (nam æqualis alterno e c d, per uigesimam nonã primi) & d b g, recti dimidius est (æqualis siquidẽ ad uerticẽ posito c b e, per quintamdecimã ipsius primi) reliquus igitur angulus b g d, dimidius itidẽ est recti. Ambo ergo d b g, & b g d, anguli, eidem (hoc est dimidio unius recti) sunt æquales: & æquales propterea adinuicẽ, per primam communem sententiam. hinc b d, latus, ipsi d g, lateri, per sextam primi respondenter æquatur. Præterea, quoniam e f g, trianguli, tres anguli binis rectis, per candem trigesimamsecundam primi, sunt rursum æquales: rectus est autem qui ad



f (nam æqualis opposito qui ad c, per trigesimamquartam eiusdem primi) & e g f, recti dimidius est: reliquus igitur f e g, dimidius itidem est recti. Aequalis igitur est angulus f e g, ipsi e g f, per primam communem sententiam: & latus consequenter e f, lateri f g, per sextam eiusdem primi æquale.

Demõstratio theorematis.

¶*His ita demonstratis, quoniam æqualis est a c, ipsi c e: quod igitur ex a c, quadratum, æquum est ei quod ex c e. fit quadrato, per corollarium quadragesimæsextæ ipsius primi. Eis porrò quæ ex a c, & c e, fiunt quadratis: æquũ est id, quod ex a e, describitur, per quadragesimamseptimam primi. Quod igitur ex a e, fit quadratum, duplum est eius quod ex a c. Item, quoniam æqualis est e f, ipsi f g: quæ ab ipsis describuntur quadrata, sunt rursum adinuicem æqualia. Eisdem porrò quæ ex e f, & f g, fiunt quadratis, æquum est ex e g, descriptum quadratum, per eandem quadragesimamseptimam primi: rectus est enim qui ad f, angulus. Quod igitur ex e g, fit quadratũ, duplum est eius quod ex e f. Aequalis autem est e f, ipsi c d, per trigesimamquartam primi: & quæ ab æqualibus rectis describuntur quadrata, æqualia sunt adinuicem, per ipsum quadragesimæsextæ primi corollarium. Quod igitur ex e g, fit quadratum, duplum est eius quod ex c d. Ostendimus autem descriptum ex a e, quadratum duplũ itidem fore, eius quod fit ex a c. Quæ igitur ex a e, & e g, utraque quadrata, dupla sunt eorum quæ ex a c, & c d, fiunt quadratorum. Eis autem quæ ex a e, & e g, fiunt quadratis, æquum est rursum quod ex a g, describitur, per ipsam quadragesimamseptimam primi: rectus est enim a e g, angulus. Descriptum itaque ex a g, quadratum, duplum est eorum quæ ex a c, & c d, fiunt quadratorum. Et demum quod ex a g, fit quadrato, æqualia sunt quæ ex a d, & d g, quadrata describuntur, per sæpius allegatam quadragesimamseptimam primi: quoniam a d g, angulus, rectus est. Ergo descripta ex a d, & d g, quadrata, eorum quæ ex a c, & c d fiunt quadratorum, dupla sunt. Aequalis porrò ostensa d b, ipsi d g: & unius propterea quadratum, alterius quadrato æquum fore necessum est. Quod igitur ex tota a b, cum adposita b d, & quod ex eadem b d, adposita, utraque quadrata: dupla sunt eius quod ex a c, dimidia, & eius quod ex adiacẽte dimidia c b, & adiuncta b d, tanquàm ex una descriptorum quadratorũ. Quod demonstrare oportebat.*

Πρόβλημα α, Πρόθεσις ια.

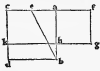
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Problema I, Propoſitio II.

II Datam rectam lineã ſecare: vt quod ex tota & altero ſegmento comprehenſum rectangulum, æquum ſit ei quod fit ex reliquo ſegmento quadrato.

ORONTIVS. Eſto recta linea a b: quam oporteat ita ſecare, ut quod ex tota a b, & altero ſegmento comprehendetur rectangulum, æquum ſit ei quod à reliquo ſegmento fiet quadrato. Ex a b, igitur, deſcribatur quadratum a b c d, per quadrageſimamſextam primi. Ipſa poſtmodum c a, bifariam ſecetur in puncto e, per decimam ipſius primi: & per primum poſtulatum, connectatur c b, recta. Producatur deinde c a, in rectum uerſus f, per ſecundum poſtulatum: atque ipſi b e, ſecetur æqualis e f, per tertiam primi. Per ipſam rurſum quadrageſimamſextam primi, deſcribatur ex a f, quadratum a f g h: & per idẽ ſecundũ poſtulatũ, producatur g h, directe in k. Secta eſt igitur a b, in puncto h: idque tali ratione, ut quod ſub a b, & b h, cõprehẽditur rectangulũ, æquum ſit ei quod ex a h, fit quadrato. Recta enim linea c a, ſecta eſt bifariam in puncto e, cui in rectum adpoſita eſt a f: comprehenſum igitur ſub c f, & f a, rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex e a, æquum eſt quadrato quod ex e f, deſcribitur, per ſextam hujus propoſitionem. Data eſt autem e f, ipſi e b, æqualis: & quæ ab æqualibus rectis quadrata deſcribuntur, ſunt adinuicem æqualia. Comprehenſum igitur ſub c f, & f a, rectangulum, unà cum quadrato, quod fit ex e a: æquum eſt ei quod ex e b, deſcribitur quadrato. Quadrato rurſũ quod fit ex e b, æqualia ſũt quæ ex e a, & a b, deſcribuntur quadrata, per quadrageſimãſeptimam primi. Rectangulum igitur quod ſub c f, & f a, continetur, una cum eo quod ab e a, fit quadrato: æquatur eis, quæ ex e a, & a b, fiunt quadratis. Auferatur quadratum quod ex e a, utrique commune. Reliquum ergo quod ſub c f, & f a, continetur rectangulum: æquum eſt ei quod ex a b, deſcribitur quadrato, per tertiam communem ſententiam. Atqui a b c d, quadratum eſt id, quod fit ex a b: & c g, rectangulum, æquũ ei quod ſub c f, & f a, cõtinetur: æqualis eſt enim f g, ipſi f a, ſunt enim eiuſdem quadrati latera. Rectangulum igitur c g, æquum eſt quadrato a b c d. Auferatur pars c h, utrique communis. Reliquum itaque rectangulũ d h, reliquo a g, quadrato, per eãdem tertiam communem ſententiã eſt æquale. Porrò d h, rectangulum, æquũ eſt ei quod ſub a b, & b h, ſegmento continetur: eſt enim b d, ipſi a b, æqualis, per ipſius quadrati diffinitionem. a g uerò, æquum eſt ei quod ex h a, reliquo ſegmento fit quadrato:

Confirmatio problematis.



descriptum est enim ex a f, quæ ipsi a b, rursum æquatur. Comprehensum ergo sub a b, & b h, rectangulum, æquũ est ei quod ex a h, fit quadrato. Data igitur recta linea a b, tali ratione secta est in puncto h: ut comprehensum sub tota a b, & uno segmentorum (utpote b h) rectangulum, æquum sit ei quod ex reliquo segmento h a, fit quadrato. Quod faciendum susceperamus.

Θεώρημα ια, Πρόθεσις ιβ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

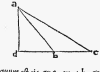
Theorema 11, Propositio 12.

IN obtusiangulis triãgulis, quod ab obtusum angulum subtendente latere fit quadratum, maius est eis quæ fiũt ad obtusum angulum comprehendentibus lateribus quadratis: comprehẽso bis sub uno eorum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum cadit perpẽdicularis, & assumpto extrinsecus sub perpendiculari ad obtusum angulum.

12

ORONTIUS. *¶Sit triangulum obtusiangulum seu amblygonium a b c, habens obtusum angulum qui ad b. producatur ergo c b, latus in rectum versus d, per secundum postulatum: & per duodecimam primi, à dato pũcto a, in productum latus c b, perpendicularis ducatur a d. Aio quòd descriptum ex a c, quadratum, eis quæ ex a b, & b c, fiunt quadratis, maius est comprehenso bis sub c b, & b d, rectangulo. Cùm enim recta c d, utcũque secta sit in b: descriptum igitur ex d c, quadratum, æquũ est eis quæ ex d b, & b c, quadratis, & ei quod bis sub d b, & b c, cõprehenditur rectangulo, per quartam huius secundi. His autem æqualibus, addatur commune quadratũ quod ex a d. quæ igitur ex a d, & d c, utraque quadrata, æqua sũt eis quæ ex a d, & d b, & b c, fiunt quadratis, & bis comprehenso sub d b, & b c, rectãgulo. Quadratis porrò quæ ex a d, & d b, æquum est id quod fit ex a b, per quadragesimamseptimam primi: rectus est enim angulus qui ad d. Quadrata igitur quæ ex a d, & d c, eis quæ fiunt ex a b, & b c, quadratis sunt æqualia, & ei quod bis sub d b, & b c, continetur rectangulo. Quadratis rursum quæ ex a d, & d c, æquum est quadratum quod ex a c, per eandem quadragesimamseptimã primi. Quod igitur ex a c, fit quadratum,*

Deductio theorematis.



æquum est eis quæ ex a b, & b c, fiunt quadratis, & comprehenso bis sub d b, & b c, rectangulo. Superat igitur descriptum ex a c, quadratum, ea quæ

ex

ex a b, & b c, fiunt quadrata: comprehenso bis sub c b, & b d, rectangulo. In obtusiangulis igitur, seu amblygonijs triangulis, & quæ sequuntur reliqua. Quod oportuit ostendisse.

Θεώρημα ιβ, Πρόθεσις ιγ.

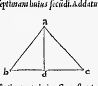
Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Theorema 12, Propositio 13.

IN oxygoniis triangulis, quod ex acutum angulum subtendente latere fit quadratum, minus est eis quæ ex acutum angulum comprehendentibus lateribus fiunt quadratis: comprehenso bis sub vno eorum, quæ sunt circa acutum angulũ, in quod perpendicularis cadit, & sumpto intus sub perpendiculari ad acutum angulum.

ORONTIVS. Sit datum oxygonium, siue acutiangulum triangulum, a b c, & datus in eo acutus angulus qui ad b. Ducatur itaque in latus b c, à puncto a, quod in eo non est, perpendicularis a d: per duodecimam primi. Dico quadratũ quod fit ex a c, minus esse eis quæ ex a b, & b c, fiunt quadratis, comprehenso bis sub b c, & b d, rectangulo. Recta siquidem linea b c, secta est utcunque in puncto d: quod igitur ex tota c b, & segmento b d, utraque quadrata, æqualia sunt comprehenso bis sub tota c b, & eodem segmento b d, rectangulo, & ei quod ex reliquo segmento d c, fit quadrato: per septimam huius secũdi. Addatur ipsis æqualibus cõmune quadratũ, quod fit ex a d: quæ igitur ex c b, & b d, & d a, fiũt quadrata, æqualia sunt comprehenso bis sub c b, & b d, rectãgulo, & eis quæ ex a d, & d c, fiunt quadratis, per secundam communem sententiam. Eis autem quæ ex b d, & d a, fiunt quadratis, æquum est id quod ex a b, describitur, per quadragesimã septimam primi: rectus est enim angulus qui ad d. Igitur quadrata quæ fiunt ex a b, & b c, æqualia sunt bis sumpto sub c b, & b d, rectangulo, & eis quæ ex a d, fiunt quadratis. Eisdem porrò quæ ex a d, & d c, fiunt quadratis, æquum est rursum id quod ex a c, describitur, per eandem quadragesimamseptimam primi: rectus est enim, qui sub a d c, angulus. Quæ igitur ex a b, & b c, utraque quadrata, æqua sunt bis comprehenso sub c b, & b d, rectangulo, & ei quod ex a c, est quadrato. Superatur ergo id quod ex a c, fit quadratum, ab ijs quæ ex a b, & b c, fiunt quadratis, comprehenso bis sub c b, & b d, rectangulo. In oxygonijs itaque, uel acutiangulis triangulis, &c. ut in theoremate. Quod ostendere fuerat operæpretium.

Summaria theorematis ostensio.



Corollarium.

¶ Hinc facile colligitur, huiuscemodi perpendicularem, in rectangulis triangulis, necessariò coincidere super ipsius trianguli latus, hoc est, neque intra, neque extra triangulum: in amblygoniis uerò extra, & in oxygoniis intra. Non potest enim perpendicularis ipsa in amblygoniis neque in oxygoniis triangulis, cũ ipso trianguli latere conuenire: obtusus enim uel acutus angulus, foret æqualis recto, contra undecimam & duodecimam diffinitionem primi. Similiter nec in amblygoniis intra, uel in oxygoniis extra potest incidere: tunc enim trianguli exterior angulus, minor esset interiore & ex opposito, contra decimamsextam ipsius primi. ¶ Nec te fugiat insuper, quòd hic de latere oxygonij proponitur trianguli: uerùm etiam habere, de quocunque latere angulum acutum, tam in rectangulis quàm amblygoniis triangulis subtendente.

Notandum.

Πρόβλημα β, Πρότασις ιδ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

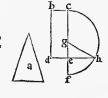
Problema 2, Propositio 14.

Dato rectilineo, æquum quadratum constituere.

14

ORONTIVS. ¶ Esto datum rectilineum a, cui oporteat æquale quadratum constituere. In primis ergo ipsi a, rectilineo, æquale constituatur parallelogrammum rectangulum b c d e: per quadragesimamquintam primi. si igitur c e, & e d, latera, fuerint adinuicem æqualia, constabit iam ipsius problematis intentio: erit enim b c d e, parallelogrammum quadratum. At si latus c e, ipsi e d, non fuerit æquale, alterum eorum erit maius: esto maius c e. Producatur igitur c e, in rectum uersus f, per secundum postulatum: detúrque e f, ipsi e d, æqualis, per tertiam primi. Recta insuper c f, diuidatur bifariam in puncto g, per decimam eiusdem primi. Et centro g, interuallo autem g c, aut g f, semicirculus describatur c h f, per tertium postulatum. Et per secundum postulatum, producatur d e, in rectum usque ad h: & connectatur g h, recta, per primum postulatum. His ita constructis, quoniam recta linea c f, secta est in æqualia in g, & in non æqualia in puncto e: rectangulum igitur comprehensum sub c e, & e f, unà cum quadrato quod ex e g, æquum est ei, quod à dimidia g f, describitur quadrato, per quintam huius. Aequalis est autem g f, ipsi g h, per decimamquintam diffinitionem primi: & ab æqualibus lineis rectis, æqualia describuntur quadrata, per corollarium quadragesimæsextæ primi. Comprehensum igitur sub c e, & e f, rectangulum, unà cum quadrato quod ab e g: æquum est ei quod ex g h, fit quadrato. Ei porrò quod ex g h, fit quadrato, æqualia sunt ea, quæ ex g e, & e h, describuntur, per quadragesimamseptimam primi: rectus est enim angulus qui ad e, per decimamtertiam, aut uigesimamnonam ipsius primi. Comprehensum igitur sub c e, & e f, rectangulum,

Vt constituẽda figura.



Demonstratur problema.

gulum, unà cum eo quod ex g e, fit quadrato: æquū est iis, quæ ab eadem g e, & ipsa e h, fiunt quadratis. Tollatur id quod ex g e, fit quadratum, utrisque æqualibus commune. Reliquum igitur rectangulum sub c e, & e f, comprehensum, æquum erit descripto ex e h, quadrato: per tertiam communem sententiam. Ipsi porro sub c e, & e f, comprehenso rectangulo, æquum est b c d e, parallelogrammum: ipsa enim e f, data est æqualis e d. Igitur b c d e, parallelogrammo, æquum est id quod ex e h, fit quadratum, per primam communem sententiam. Eidem rursum b c d e, parallelogrammo, æquū est datum a, rectilineum, per constructionem. Per eandem itaque primam communem sententiam, dato a rectilineo: æquum est id quod ex e h, fit quadratum. Quod fuerat in primis constituendum.

SECVNDI LIBRI GEOMETRICORVM ELEMENTORVM FINIS.

& dicto segmento a c, & ei quod sub reliquo segmento c b, fit quadrato. Si recta igitur linea, &c. ut in theoremate. Quod oportuit ostendisse.

Θεώρημα η, Πρόθεσις η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Theorema 8, Propositio 8.

8

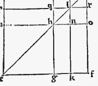
SI recta linea secetur vtcunque: rectangulum comprehensum quater sub tota & vno segmentorum, cum eo quod ex reliquo segmento est quadrato, æquum est ei quod fit ex tota & prædicto segmento, tanquam ab vna descripto quadrato.

ORONTIVS. ¶ Esto a b, recta linea, utcunq; secta in puncto c, dico quòd rectangulum quater sub tota a b, & uno segmentorum, utpote b c, comprehensum, unà cum quadrato quod fit ex a c: æquum est ei, quod ex a b, & codē segmento b c, tanquam ab una describitur quadrato. Producatur enim a b, in directum uersus d, per secundum postulatum: & ponatur b d, æqualis ipsi b c, per tertiam primi. Ex a d, autē describatur quadratum a d e f, per quadragesimamsextam eiusdē primi: & cōnectatur dimetiens e d, per primum postulatum. Per trigesimamprimam deinde ipsius primi, per c & b, puncta, ipsis a e, & d f, parallelæ ducantur c g, & b k, dimetientem e d, secantes in punctis h, l: & per candē trigsiemamprimam, per puncta h, & l, ipsis a d, & e f, parallelæ rursum ducantur m h o, & p l r.

Figuræ constructio.

Demōstratio theorematis.

Et quoniam per constructionem c b, ipsi b d, est æqualis: & q l, ipsi c b, necnon l r, ipsi b d, per trigesimamquartam primi. Est igitur q l, æqualis ipsi l r, per primam communem sentētiam: quæ enim æqualibus æqualia sunt, ea sunt æqualia adinuicem. & h n, consequēter ipsi n o, itidem concludetur æqualis. Parallelogrammum itaque b r, æquum est ipsi c l, & proinde q n, ipsi l o, parallelogrammo æquale, per trigesimamsextam ipsius primi: sunt enim b r, & c l, in æqualibus basibus, ac in eisdem parallelis cōstituta, similiter & q n, atque l o. Atqui c l, & l o, supplementa eorum quæ circa dimetientem b d, sunt parallelogrammorum, per quadragesimamtertiam eiusdem primi æqualia sunt adinuicem. Igitur b r, & q n, parallelogramma, æquis sunt æqualia parallelogrammis: & æqua propterea adinuicem, per eandē primam cōmunem sententiam.



Quatuor igitur b r, c l, l o, & q n, sunt adinuicē æqualia: & quadrupla consequenter ipsius c l. Insuper quoniam b r, & q n, parallelogramma, per corollarium quartæ, huius sūt quadrata: æqualis est b l, ipsi b d, & q h, ipsi q l, per ipsius quadrati diffinitionē. Eidē porrò b d, æqualis est c b, per cōstructionem: & b l, igitur

igitur ipsi c b, per primam communem sententiam est æqualis. Ipsi rursum c b, æqualis est q l, necnon c q, ipsi b l, æqualis, per trigesimamquartam primi: & c q, igitur ipsi q l, per eandem communem sententiam est æqualis. at q b, eidem q l, æqualis præostensa est: & c q, igitur ipsi q b, per ipsam primam cõmunem sententiam est æqualis. Patuit autem, quòd & b n, ipsi n o, itidem æqualis est. Parallelogrammum igitur a q, ipsi p b, necnon b k, ipsi n f, per trigesimamsextam primi coæquatur: sunt enim a q, & p b, similiter & b k, atq; n f, in basibus æqualibus, ac in eisdem parallelis constituta. Vtrunque igitur a q, & p b, dimidium est ipsius a b: necnon utrunque b k, & n f, ipsius b f, dimidium. Et quoniam a b, & b f, supplementa eorum quæ circa dimetientem e d, sunt parallelogrammorum, æqualia sunt adinuicẽ, per quadragesimamtertiam primi: & quæ æqualium sunt dimidium, ea sunt adinuicem æqualia, per septimam communem sententiam. Quatuor igitur a q, p b, b k, & n f, æqualia sunt adinuicem: & quadrupla consequenter ipsius a q, parallelogrammi. Ostẽsum est autem, quod & b r, c l, l o, & q n, quadruplum sunt ipsius c l. Octo igitur parallelogramma, m d g, gnomonem cõstituentia, quadruplum efficiunt totius a l, parallelogrammi. Est autem a l, parallelogrammo, id quod sub a b, & b c, continetur rectangulum æquale: nam b l, ipsi b c, æqualis ostensa est. Rectangulum igitur quater sub a b, & b c, comprehẽsum, æquum est gnomoni m d g. Addatur ei quod sub a b, & b c, quater comprehenditur rectangulo, quadratum quod ex a c: ipsi autem gnomoni m d g, quadratum m g, eidem quod ex a c, fit æquale (nam a c, ipsi m b, per trigesimamquartam primi est æqualis.) Quater igitur sub a b, & b c, comprehensum rectangulum, unà cum quadrato quod ex a c: æquatur gnomoni m d g, & ipsi quadrato m g. Eisdem porrò gnomoni m d g, & quadrato m g: æquum est quadratum a d e f. Quadratum autem a d e f, æquum est ei quod ex a b, & b c, tanquam ex una describitur quadrato: data est enim b d, ipsi b c, æqualis. Cõprehensum igitur quater sub tota a b, & segmento b c, cum eo quod ex reliquo segmento a c, fit quadrato: æquum est ei quod fit sub tota a b, & prædicto segmento b c, tanquam ex una descripto quadrato. Si recta igitur linea, &c. ut in theoremate. Quod demonstrare fuerat operæprecium.

Θεώρημα θ, Πρόθεσις θ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Theorema 9, Propositio 9.

Si recta linea secetur in æqualia & non equalia: quæ ab inequalibus totius segmentis fiunt quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio sectionum fit quadratorum.

ORONTIVS. ¶ Secetur enim a b, recta bifariã, in pũcto c: & in nõ æqualia, in d. Aio quòd descripta ex a d, & d b, quadrata, dupla sunt eorum quæ ex a c,

Orontij Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, in tertium elementorum Euclidis, Demonstrationes.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Ὅροι.

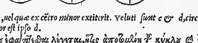
Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

Diffinitiones.

AEquales circuli ſunt, quorum dimetientes ſunt æquales: vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

Circulorum inæqualiũ cõtraria diffinitio.

Quales tibi repræſentant ſubſcripti a, & b, circuli. Hinc patet circulorum non æqualium diffinitio. Quorum enim dimetientes, uel quæ ex centris fuerint inæquales, & ipſi quoq; inæquales ſũt circuli. Maior autẽ erit, cuius dimetiẽs, uel quæ ex cẽtro maior: minor uerò, cuius dimetiens, uel quæ ex cẽtro minor extiterit. Veluti ſunt c & d, circuli: quorum c, maior eſt ipſo d.

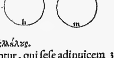


Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ circulum tangens & eiecta, circulum non ſecat. [2]

Quæ circulũ ſecat.

Hanc tibi repræſentat e f, tangẽs circulũ g h, in puncto quidem g. Quæ igitur cadit intra circulum: eiecta, circulum ſecare perhibetur: ueluti recta k l, quæ datum k l m, circulum interſecat.



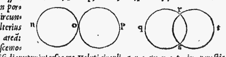
¶ Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

Circuli ſeſe tangere adinuicem dicuntur, qui ſeſe adinuicem tangentes, ſe non inuicem ſecant. [3]

Quales

Quales esse uidentur n o, & o p, circuli, in o, puncto sese inuicem contingentes. Cùm porro unius circunferentia, alterius ingreditur aream: tunc huiusce modi circuli, sese dicuntur intersecare. Veluti circuli q r s, & r s t, in punctis quidem r, & s, se mutuo intersecantes.

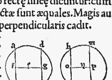
Circuli sese intersecãtes.



Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι. μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 In circulo æqualiter distare à centro rectę lineę dicuntur: cùm à centro in eas perpendiculares ductæ sunt æquales. Magis autem distare dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Quemadmodum in a b c d, circulo, cuius centrum e, existentes lineæ rectæ a b, & c d, æqualiter ab eodem centro e, distare censentur: propterea quòd e f, & e g, perpendiculares, sunt inuicem æquales. In circulo porrò b k l m, cuius centrum n, plus distare dicitur b k, à centro n, quàm l m: quoniam perpēdicularis n o, maior est n p.

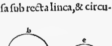


Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

5 Sectio circuli, est figura comprehensa sub recta linea, & circuli circunferentia.

In exemplum habes a b c, & d e f, circulorum sectiones: sub rectis a c, & d f, & a b c, atque d e f, circunferentijs comprehensas. Quarum a b c, centrum includens, maior est ipsa d e f, extra centrum constituta.

Sectio, maior, minor.



Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

6 Sectionis angulus, est qui sub recta linea, & circuli circunferētia comprehenditur.

Cuiusmodi est angulus b a c, antecedentis descriptionis: sub a c, recta, & a b, circunferentia comprehensus: aut e d f, angulus, qui sub recta d f, & d e, circunferentia continetur. Quos quidem angulos mixtos uocitare solemus: id est, sub recta & curua linea comprehensos.

Anguli mixti.

Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶ, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος, ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις

K ἐστὶ

ἐστὶ βάσεως τῆ τμήματος, ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

In sectione autem angulus est: cùm in circunferentia sectionis contingit aliquod punctum, & ab eo in rectæ lineæ fines, quæ basis est sectionis, rectæ lineæ coniunguntur. Contentus angulus, sub coniunctis rectis lineis. 7

Quemadmodum ex subiectæ descriptionis angulis g h k, & l m n, deprehẽdere licet. A puncto enim h, in fines ipsius rectæ lineæ g k (quæ basis dicitur) rectæ lineæ h g, & h k, coniunctæ, angulum ipsum g h k, in data sectione, & ad punctum h, constituunt. Idem censeto de l m n, alterius sectionis angulo.

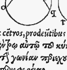


Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

Cum verò comprehendentes angulum rectæ lineæ, aliquã suscipiunt circunferentiam: in illa angulus esse dicitur. 8

Veluti sunt o p, & p q, lineæ rectæ, angulũ qui ad punctũ p, cõprehẽtes, & o p q, suscipiẽtes circunferentiã. In ipsa igitur circunferentia o p q, comprehensus angulus esse dicitur. Quòd si rectæ lineæ angulũ cõstituentes, ad centrum conueniant circuli: cõprehensus tũc angulus in cẽtro dicetur esse circuli, ueluti angulus r s t, sub rectis r s, & s t, ex cẽtros, prodeũtibus cõprehẽsus.

Angulus in centro.



Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτῷ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

Sector autem circuli est, cũ ad centrum circuli steterit angulus, comprehensa figura sub angulum comprehendentibus rectis lineis, & assumpta sub eis circunferentia. 9

Cuiusmodi esse uidetur figura r s t, antecedẽtis descriptionis, sub rectis lineis r s, & s t, angulum qui ad centrum s, constituentibus, & circunferentia r s, comprehensa. Differt igitur sector, à sectione circuli.

Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Similes sectiones circuli sũt, quæ angulos æquos suscipiũt, vel in quibus anguli sibi inuicem sunt æquales. 10

Vti subiectæ circuli sectiones a b c, & d e f, in quibus anguli qui ad b, & e, sunt adinuicẽ æquales. Quamuis itaque circuli sectiones fuerint inæquales, possunt nihilominus es-



se similes. Nam similitudo sectionum, respicit tantummodo susceptorum angulorum æqualitatem: non autem datarum sectionum magnitudinem. quemadmodum angulorum magnitudo, non linearum angulos ipsos comprehendentium quantitatem: sed earundem linearum solam respicit inclinationem.

Πρόβλημα α, Πρότασις α.

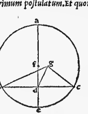
Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Problema 1, Propositio 1.

DAti circuli, centrum inuenire.

ORONTIUS. *Esto datus a b c, circulus: cuius oporteat inuenire centrum. Ducatur in ipso a b c, circulo, recta quædam linea b c: quæ bifariam secetur in d, per decimam primi. Et à puncto d, datæ rectæ lineæ b c, ad angulos rectos excitetur d a, per undecimam eiusdem primi: producatúrque in rectum usque ad e, per secundum postulatum. Secetur tandem a e, bifariam in puncto f, per ipsam decimam primi. Dico, quòd f punctum, centrum est ipsius dati a b c, circuli. Si enim non fuerit in a e, linea recta, erit igitur extra eam. esto (si possibile sit) in g: & connectantur g b, g d, & g c, rectæ, per primum postulatum. Et quoniam b d, ipsi d c, est æqualis, & utrique communis d g: binæ igitur b d, & d g, trianguli b d g, duabus g d, & d c, trianguli g d c, sunt altera alteri æquales. Basis quoque b g, basi g c (si g, foret centrum circuli) per decimamquintam primi diffinitionem esset æqualis. Per octauam igitur ipsius primi, angulus b d g, angulo g d c, sub æquis lateribus comprehenso, respondenter æquaretur. Recta itaque linea g d, incidens in rectam b c, efficeret utrobique angulos æquales: ergo rectos, per decimam primi diffinitionem. Rectus igitur esset b d g, angulus. Atqui b d a, rectus est, per constructionem: suntque recti omnes æquales adinuicem, per quartum postulatū. Et b d g, itaque angulus, æquus esset angulo b d a: totus uidelicet suæ parti, contra nonam communem sententiam. Recta enim d a, cadit inter b d, & d g: diuiditque propterea angulū b d g. Non est igitur centrum a b c, circuli, in g. Haud dissimiliter ostendemus, quòd nec alibi quàm in puncto f. Igitur f, centrum est dati circuli a b c. Quod inueniendum fuerat.*

Demōstratio ab impossibili.



Corollarium.

Si igitur in circulo recta linea, aliā quandā rectam lineam bifariam, & ad rectos secuerit angulos: in ipsa diuidente erit centrum dati circuli.

Θεώρημα α, Πρότασις β.

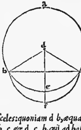
Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Theorema 1, Propositio 2.

SI in circuli circunferentia duo fuerint pūcta, vtcūque contingentia: ad ea puncta applicata recta linea, intra ipsum circulum cadit.

ORONTIVS. ¶Sit a b c, circulus: in cuius circunferentia sint b, & c, utcunque contingentia puncta. Aio quòd connexa ex b, in c, recta linea, cadit intra circulum a b c. Si enim non cadit intra, coincidit igitur in comprehensam circunferentiam, uel cadit extra circulum. Atqui recta ipsa, cum ipsius circuli circunferentia minime potest conuenire: non differret enim rectum a curuo. Cadat igitur, si possibile sit, extra circulum a b c: & inuento ipsius circuli centro d, per primam huius, susceptóque puncto e, in b c, circunferentia: connectantur d b, d e, & d c, rectæ lineæ, per primum postulatum: producatúrque per secundum postulatum, recta d e, in directum usque ad f, hoc est, in eam quæ extra cadere concessa est. Erunt igitur d b, d e, & d c, adinuicem æquales, per decimamquintam diffinitionem primi: & d f, insuper maior ipsa d e, per nonam communem sententiam. Triangulum itaque erit d b f c, atque isosceles: quoniam d b, æqualis est ipsi d c. Vnde per quintam primi, anguli d b c, & d c b, qui ad basin b f c, erunt adinuicem æquales. Triangulum insuper erit d b f, & ipsium b f, latus, productum in c: exterior igitur angulus d f c, maior erit interiore & ex opposito d b f, per decimamsextam ipsius primi. Ipsi porrò d b f, angulo, ostensus est æqualis d c f: & d f c, igitur angulus, ipso d c f, angulo maior erit. quæ enim sunt æqualia, eiusdem sũt æquè minora, per septimæ cõmunis sentẽtiæ conuersionẽ. In triangulo igitur d c f, angulus qui ad f, maior erit angulo qui ad c. Omnis porro trianguli maius latus, sub maiori angulo subtenditur, per decimamoctauam eiusdem primi. maius igitur erit latus d c, ipso d f. Ipsi autem d c, æqualis est d e, ut nuper ostendimus. Et d e, igitur maior erit ipsa d f, minor uidelicet maiore, seu pars toto: quod per nonam communem sententiam est impossibile. Non cadit igitur connexa ex b, in c recta, extra circulum a b c, neque in circunferẽtiam b e c: igitur intra. Quod ostendendum fuerat.

Ostensio rursum per impossibile.



Θεώρημα β, Πρόθεσις γ.

Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμει.

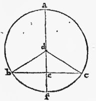
Theorema 2, Propositio 3.

SI in circulo recta linea quædam per centrum extensa, quãdam non per centrum extensam rectam lineam bifariam secuerit: & ad angulos rectos ipsam dispescet. Et si ad angulos rectos ipsam dispescat, bifariam quoque ipsam secabit. 3

ORONTIVS. ¶Sit datus a b c, circulus, & illius centru d: recta uerò linea per idem centrum extensa sit a f, quæ aliam quandam rectam lineã b c, non

non ductam per centrum, bifariam imprimis secet in puncto e. Aio quòd & ad rectos eam simul dispescit angulos. Connectantur enim d b, & d c, rectæ, per primum postulatum. Cùm igitur ex hypothesi recta b e, sit æqualis e c, & e d, utrique communis: binæ igitur b e, & e d, trianguli b e d, duabus d e, & e c, trianguli d e c, sunt æquales altera alteri: basis quoque b d, basi d c, est æqualis, per decimamquintam diffinitionem primi. Angulus ergo b e d, angulo d e c, sub æquis lateribus cõprehenso, per octauã ipsius primi, est æqualis. Recta itaq; d e, consistẽs super rectam b c, efficit utrobique angulos adinuicem æquales: ergo rectos, per decimam eiusdem primi diffinitionem. Rectus est igitur uterque angulorum qui sub b e d, & d e c. ¶ Secet rursum eadem a f, datam ipsam b c, ad rectos angulos. Dico quòd & bifariam eandem uersa uice diuidet. Eadem nanque figuræ manente dispositione, quoniam æqualis est d b, ipsi d c, per circuli diffinitionem, æquus est proinde angulus d b c, angulo d c b, per quintã primi. Rectus insuper d e b, recto d e c, itidem æqualis est, per quartum postulatũ. Reliquus igitur angulus b d e, reliquo e d c, per corollarium trigesimæsecundæ primi, & tertiam communem sententiam est æqualis.

Pars secũda conuersa precedentis.



Bina itaque triangula b d e, & e d c, habẽt duo latera b d, & d e, binis lateribus e d, & d c, æqualia alterum alteri (nam b d, ipsi d c, est æquale, & d e, utrique commune) & angulum angulo æqualem sub æquis lateribus contentum. Basis igitur b e, basi e c, per quartum eiusdem primi est æqualis. ¶ Potest & hæc secunda pars ita demõstrari: quoniam uterque angulorũ qui circa e, rectus est, per hypothesin: rectangula igitur sunt b e d, & d e c, triangula. Quæ igitur ex b e, & e d, utraque fiunt quadrata, æqua sunt ei quod ex b d: similiter & quæ ex d e, & e c, ei quod fit ex d c, per quadragesimamseptimam primi. Quadrata porrò quæ fiunt ex b d, & d c, æqualia sunt adinuicem, per quadragesimæsextæ primi libri corollarium: recta enim b d, ipsi d c, est æqualis, per decimamquintam ipsius primi diffinitionem. Quæ autem æqualibus æqualia sunt: ea sunt inuicem æqualia, per primam communem sententiã. Quæ igitur ex b e, & e d, fiunt quadrata, æqua sunt eis, quæ ex d e, & e c. Tollatur commune quadratum quod fit ex e d: reliquum ergo quadratũ quod ex b e, reliquo quod fit ex e c, per tertiam communem sententiam est æquale. Aequalia porrò quadrata sunt, quæ ab æqualibus rectis describuntur: proinde corollarium quadragesimæsextæ primi libri. Aequalis est igitur b e, ipsi e c. Itaque si in circulo recta linea quædam: & quæ sequuntur reliqua. Quod demõstrare oportebat.

Θεώρημα γ, Πρόθεσις δ.

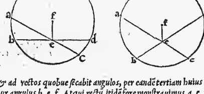
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Theorema 3, Propositio 4.

SI in circulo binæ rectæ lineæ ſeſe inuicem ſecuerint, non per centrũ extẽſæ: ſeſe inuicem bifariam non ſecabunt.

ORONTIVS. ℂEſto datus a b c d, circulus: in quo binæ rectæ lineæ a c, & b d, nõ per centrũ extenſæ, ſeſe inuicẽ ſecẽt in pũcto e. Aio quòd altera alterã bifariã nõ ſecat in eodẽ puncto e: utpote, ſi a c, ſecuerit bifariã ipſam b d, eadẽ nihlominus a c, ab ipſa b d, bifariam non diuidetur. Inueniatur enim centrũ dati circuli a b c d, ſitque illud f, per primam huius: & connectatur e f, recta, per primũ poſtulatũ. Si igitur a e, ipſi e c, fuerit æqualis: recta e f, per centrũ extenſa, eandẽ a c, non ductam per centrũ bifariam ſecabit, & ad rectos igitur angulos, per tertiã huius. Rectus erit itaque a e f, angulus. Haud diſſimiliter ſi b e, ſit æqualis ipſi e d: eadem e f, per centrum educta, ipſã b d, nõ per centrũ extẽſam, bifariã & ad rectos quobue ſecabit angulos, per eandẽ tertiam huius. Rectus erit igitur angulus b e f. Atqui rectũ itidẽ fore monſtrauimus a e f, angulũ: ſũntq; recti omnes inuicem æquales, per quartum poſtulatum. Aequus erit igitur b e f, angulus, ipſi angulo a e f. Angulus porrò a e f, eſt pars ipſius b e f, anguli: recta ſiquidem e a, cadit inter b e, & e f, rectas, diuiditque propterea ipſum angulum b e f. Totus itaque b e f, angulus, ſuæ parti a e f, erit æqualis: quod per nonam communẽ ſententiam eſt impoſſibile. Si in circulo igitur a b c d, binæ rectæ lineæ a c, & b d, ſeſe inuicẽ ſecuerint, nõ per centrũ extẽſæ, ſeſe inuicem bifariam non ſecabũt. Quod oſtendere fuerat operæpretium.

Demonſtratio ab impoſſibili.



Θεώρημα δ′, Πρόθεσις ε.

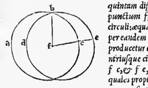
Εἀν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Theorema 4, Propoſitio 5.

SI bini circuli ſeſe inuicem ſecuerint: non erit eorum idem centrum.

ORONTIVS. ℂBini enim circuli a b c, & d b e, ſeſe inuicem ſecẽt in duobus punctis, quorum alterum ſit b. Dico quòd ipſorum circulorum non eſt idem centrum. Si enim fuerit poſſibile, ut idem habeant centrum: eſto illud f. & connectantur f b, & f c, per primum poſtulatum: extendatúrque per ſecundum poſtulatum, eadem f c, in rectum uſque ad e. Si igitur f, punctum, fuerit centrum circuli a b c, erit f c, ipſi f b, æqualis, per decimam quintam

Oſtenſio rurſum ab impoſſibili.



quintam diffinitionem primi. Si idem quoque punctum f, centrum extiterit ipsius d b e, circuli: æqualis rursum erit f e, eidem f b, per eandem decimamquintam diffinitionem: producetur enim f b, ex communi centro in utriusque circuli circumferētiam. Binæ igitur f c, & f e, eidem f b, erunt æquales: & æquales propterea adinuicem, per primam communem sententiam. Aequalis igitur erit f e, ipsi f c. atqui f c, pars est ipsius f e: totum igitur esset æquale suæ parti. Omne porrò totum est sua parte maius, per nonam communem sententiam: igitur punctum f, non est commune centrum datorum a b c, & d b e, circulorū. Si bini itaque circuli: & quæ sequuntur reliqua. Quod receperamus ostendendum.

Θεώρημα ε, Πρόθεσις ς.

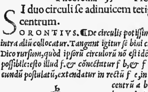
Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Theorema 5, Propositio 6.

6 Si duo circuli se adinuicem tetigerint: eorum non est idem centrum.

ORONTIVS. De circulis potissimū intelligit Euclides, quorū unus intra aliū collocatur. Tangant igitur se bini circuli a b c, & d b e, in pūctō b. Dico rursum, quòd ipsorū circulorū nō est idē cōmune centrū. Si id enim fuerit possibile: esto illud f. & cōnectatur f b, & f e, per primū postulatū: & per secundū postulatū, extendatur in rectū f c, in punctū c. Si f, igitur punctū, sit centrū a b c, circuli: æqualis erit f e, ipsi f b, per decimamquintam diffinitionem primi. Itē si idē punctū f, cētrum fuerit circuli d b e: æqualis rursum erit f e, eidē f b, per eandē decimamquintam ipsius primi diffinitionem: nam f b, ex cōmuni centro, in utriusque circuli producetur circūferentiam. Binæ igitur f c, & f e, eidē f b, erūt æquales: & propterea æquales adinuicem, per primam communem sententiā. Ergo f c, æqualis erit ipsi f e. Est autē f e, pars ipsius f e: tota igitur f c, suæ parti f c, coæquabitur: quod per nonam cōmunem sententiam non uidetur esse possibile. Ergo punctum f, non est idem commune centrum eorundem circulorum a b c, & d b e, intus se adinuicem tangentium: nam de ijs qui se tangunt extra, per se fit manifestum. Si duo igitur circuli, & c. ut in theoremate. Quod oportuit ostendisse.

Idē qui prius arguendi modus ab impossibili.



Θεώρημα ς. Πρόθεσις ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον,

κύκλου, μεγίστη μὲν ἔσαι ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. τῶν δ᾽ ἄλλων ἀεί, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

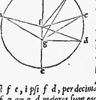
Theorema 6, Propositio 7.

7

SI in diametro circuli aliquod contingat punctum quod minimè circuli centrum sit, ab eóque puncto in circulum quædam rectæ lineæ procidāt: maxima erit in qua centrum, minima verò reliqua. Aliarū verò, semper propinquior ei quæ per centrum extenditur, remotiore maior est. Duæ autem solùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimę.

ORONTIVS. ¶Esto datus circulus a c e h, cuius centrum f, dimetiens uerò a f e, & contingens in eo punctum g, quod non est circuli centrū: procidentes autem ex eodem puncto g, in ipsius circuli circunferentiam lineæ rectæ, sint g b, g c, & g d. Aio primùm, quòd g a, est omnium maxima, & g e, minima: aliarum porrò, g b, ipsi g a, propinquior, maior ipsa g c, atq; g c, remotiore g d, maior. Connectantur enim f b, f c, & f d, rectæ, per primum postulatum. Cùm igitur f a, ipsi f b, per decimamquintam diffinitionem primi, sit æqualis, & utrique communis f g: binæ igitur g f, & f a, duabus g f, & f b, sunt æquales. Porrò g f, & f b, maiores sunt ipsa g b: omnis siquidem trianguli bina latera, reliquo sunt maiora quomodocunque assumpta, per uigesimam primi. Et g a, igitur, ipsa g b, maior est: quæ enim sunt æqualia, eiusdem sunt æquè maiora, per ipsius sextæ communis sententiæ conuersionem. Item quoniam æqualis est f b, ipsi f c, & g f, rursum utrique communis: binæ igitur g f, & f b, trianguli g f b, duabus g f, & f c, trianguli g f c, sunt æquales altera alteri. Atqui g f b, angulus, maior est ipso g f c, sub æquis lateribus comprehenso: recta enim f c, cadit inter f b, & f g, & diuidit propterea ipsum angulum g f b. Basis itaque g b, basi g c, maior est, per uigesimamquartam primi. Simili discursu, g c, ipsa g d, maior ostendetur. Insuper quoniam f g, & g d, maiores sunt ipsa f d, per ipsam uigesimam primi, & æqualis est f e, ipsi f d, per decimamquintam eiusdem primi diffinitionem: igitur f g, & g d, maiores sunt eadem f e: quæ enim sunt æqualia, eiusdē sunt æque minora, per septimæ cōmunis sententiæ cōuersionem. Tollatur communis f g: ergo reliqua g d, reliqua g e, per quintam communē sententiam erit maior. Omniū itaque maxima est g a, minima uerò reliqua g e: aliarum porrò g b, maior ipsa g c, & eadem, g c, ipsa g d, itidem maior. ¶Dico prætereà, quod ab eodem

Pars prima theorematis.



ab eodem puncto g, duæ rectæ lineæ coincidunt æquales, ad utrasque partes ipsius g e, minimæ: utpote ipsi g c, æqualis uersus h. Ad datam enim rectã lineam g f, datúmque in ea punctum f, dato angulo rectilineo g f c, æqualis angulus rectilineus constituatur g f h, per uigesimamtertiam primi: connectatur deinde g h, per primum postulatum. Cum igitur f c, ipsi f h, sit æqualis, per decimamquintam ipsius primi diffinitionem, & g f, utrique communis: binæ ergo g f, & f c, trianguli g f c, duabus g f, & f h, trianguli g f h, sunt altera alteri æquales: & æquos inuicem comprehendunt angulos, per constructionem. Basis igitur g c, basi g h, per quartam eiusdem primi est æqualis. ¶ *Aio tandem, quòd ipsi g c, ab e codẽ puncto g, alia quam g h, non cadet æqualis. Si enim id possibile fuerit: aut illa cadet supra punctum h, uel infra. Si ceciderit supra, uersus a: tunc ipsa erit propinquior ei, quæ per centrum, utpote ipsi g a: ergo maior ipsa g h, remotiore, per primam partem iam demonstratam: & maior consequenter ipsa g c. Quòd si detur incidere infra pũctum h, uersus e: tunc ipsa linea, remotior erit ab eadem g a, quæ per centrum: ergo minor ipsa g h, propinquiore, per eandem præostensam primam partem: & minor igitur ipsa g c. Similiter ostendemus quòd nec ipsi g h, alia quàm g c, dabitur æqualis, ab eodem puncto g, & ad partes b d. De cæteris quibuscunque, idem respondenter subsequetur. Igitur si in diametro circuli aliquod contingat punctum, & quæ sequuntur reliqua. Quod demõstrandum fuerat.*

Tertia pars.

Θεώρημα ζ, Πρότασις η.

Ἐὰν κύκλῳ ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μέν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον, μείζων ἐστί. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττων. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Theorema 7, Propositio 8.

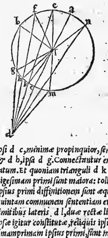
8 SI extra circulum suscipiatur aliquod punctum, ab eóque puncto ad circulum deducantur rectæ lineæ aliquæ, quarum quidem vna per centrum extendatur, reliquæ verò vtcunque: In concauam circunferentiam cadẽtium rectarum linearum, maxima est, quæ per centrum ducta est: Aliarum autem semper ei quæ per centrum transit propinquior, remotiore maior est. In curuam verò circunferentiam cadentium rectarum linearum, minima est, quæ inter punctum & dimetiẽtẽ iacet: minimæ verò propinquior, semper remotiore minor

 est.

est. Duæ autem tantùm rectæ lineæ, ab eo pūcto in ipsum circulum cadunt æquales, ad vtrasque partes minimę.

ORONTIVS. ¶ *Esto circulus a b c, datum uerò punctum extra circulū d: à quo in ipsum circulum procidant rectæ lineæ d a, d e, d f, & d b, curuam eiusdem circuli circunferentiam in punctis g, h, k, c, dispescentes: quarum d a, per ipsius circuli centrum (quod sit l) extendatur.* Dico primùm, quòd in a b, *concauam circunferētiam, hoc est intra circulum, cadentium rectarum linearū, maxima est d a, per l, centrum educta: & quæ illi uicinior d e, remotiore d f, maior, eadémque d f, maior ipsa b d.* Connectantur *enim l e, l f, & l b, rectæ lineæ, per primum postulatum.* Et *quoniam æqualis est l a, ipsi l e, per decimamquintam diffinitionem primi, & utrique cōmunis d l: tota igitur d a, ipsis d l, & l e, per secundā cōmunem sentētiam est æqualis.* Atqui *d l, & l e, bina ipsius d l e, trianguli latera, sunt maiora reliquo d e, per uigesimā primi: & ipsa igitur d a, maior est ipsa d e: æqualia enim eiusdē sunt æquè maiora, per sextæ cōmunis sententiæ cōuersionē.* Insuper, *quoniā l e, ipsi l f, per eandē decimamquintam diffinitionē primi est æqualis, & utrique communis d l: binæ igitur d l, & l e, trianguli d l e, duabus d l, & l f, trianguli d l f, sunt æquales altera alteri, per eandē secundam cōmunem sentētiā.* An*gulus porrò d l e, maior est ipsō d l f, sub æquis lateribus comprehensō: recta siquidem l f, cadit inter d l, & l e, diuiditque propterea ipsum angulū d l e.* Basis *igitur d e, basi d f, maior est, per uigesimamquartam primi.* Et *proinde d f, maior est ipsa d b.* Igitur *d a, maxima est, & d e, ipsa d f, atque d f, ipsa d b, maior.* ¶ Dico *præterea, ꝙ incidētium in curuam seu cōuexam circunferentiā g c: hoc est, extra circulum, minima est d c: & quæ ipsi d c, minimæ propinquior, semper remotiore minor, hoc est, d k, ipsa d b, & d h, ipsa d g.* Connectantur *enim l g, l h, & l k, rectæ, per primum postulatum.* Et *quoniam trianguli d k l, bina latera d k, & k l, reliquo d l, per uigesimam primi sunt maiora: tollantur l c, & l k, quæ per decimamquintam ipsius primi diffinitionem sunt æquales.* Reliqua *igitur d c, reliqua d k, per quintam communem sententiam erit minor.* Item *quoniam trianguli d h l, à limitibus lateris d l, duæ rectæ lineæ d k, & k l, introrsum constituuntur: ipsæ igitur constitutæ, reliquis ipsius trianguli lateribus d h, & h l, per uigesimamprimam ipsius primi, sunt minores.* Auferantur *l h, & l k, per ipsam decimamquintam diffinitionem primi, adinuicem æquales.* Reliqua *igitur d k, reliqua d h, minor erit, per eandem quintam communem sentētiam.* Et *d h, propterea minor erit ipsa d g.* Minima *igitur est d c: & quæ illi propinquior d k, minor ipsa d h, eadémque d h, remotiore d g, itidem minor.* ¶ Aio *tandem,* quòd

Pars prima theorematis.



Pars secūda.

Tertia pars.

quòd binæ tantũ æquales, à puncto d, in circulum ipsum a b c, cadunt ad utrasque partes ipsius d c, minimæ, siue in concauam, siue in curuam inciderint circunferentiam: utpote, ipsi d h, unà tantũ in primis æqualis, ad alteram partem ipsius d c, uersus m. Ad rectã enim d l, atque ad datum in ea punctũ l, dato angulo rectilineo d l h, æqualis angulus rectilineus constituatur d l m, per uigesimamtertiam primi: & connectatur d m, per primum postulatũ. Cùm igitur l h, ipsi l m, sit æqualis, per decimamquintam ipsius primi diffinitionem, & utrique cõmunis d l: binæ igitur d l, & l h, trianguli d l h, duabus d l, & l m, trianguli d l m, sunt æquales altera alteri: & æquos inuicem comprehendunt angulos, per constructionem. Basis igitur d h, basi d m, per quartam primi est æqualis. Neque ipsi d h, alia cadit æqualis, præter d m: & è diuerso. Aut enim caderet inter h, & m, puncta: túncque minor esset utraque & d h, & d m, nempe uicinior ipsi d c, minimæ. uel caderet extra puncta h, & m, uersus a: & tunc remotior esset ab eadem minima, & propterea maior ipsa d h, uel d m, per primam partem iam demonstratam. Haud aliter, si angulo rectilineo d l e, æqualis angulus constituatur d l n, per eandem uigesimamtertiam primi, & connectatur recta d n, per primum postulatum: ipsa d n, ipsi d e, cõcludetur æqualis. Nec poterit ipsis d e, & d n, alia dari æqualis: quoniam uel ea erit uicinior ei quæ per centrũ, uel ab eadem remotior, quàm sint ipsæ d e, & d n, & proinde utraque maior aut minor, per primam huiusce demonstrationis partem: quæ simul impossibilia sunt. Non cadunt igitur ab eodem pũcto d, in circulum ipsum a b c, plures duabus rectis lineis æquales, ad utrasque partes ipsius d c, minimæ, aut d a, maximæ. Si extra igitur circulum: &c. ut in theoremate. Quod tandem erat ostendendum.

Corollarium.

¶ Quæ igitur à puncto extra circulum dato, in circulum ipsum cadunt rectæ lineæ, ab ipsa minima, uel maxima (quæ per centrum) æque distantes: æquales sunt adinuicem, & è diuerso, siue in concauam, siue in curuam aut conuexam inciderint eiusdem circuli circunferentiam.

Θεώρημα η, Πρότασις θ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

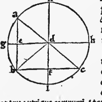
Theorema 8, Propositio 9.

9 SI in circulo suscipiatur punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales: susceptum punctum, centrum ipsius est circuli.

ORONTIVS. ¶ Sit intra circulum a b c, susceptum punctum d, à quo in eundem circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ inuicem æquales, d a, d b, & d c. Aio quòd punctum d, est centrum ipsius circuli a b c. Connectantur enim a b, & b c, rectæ, per primum postulatum: secetúrque bifariã a b, in puncto e, & b c, in puncto f, per decimam primi. cõnectãtur rursum d e, & d f, per idem primũ postulatũ: & per secũdũ postulatũ, producatur in

Hoc theorema aliter ostendi potest, sed hæc demõstratio potissima est.

directum utrobique ad puncta quidem g, h & k, l. Cùm igitur a e, sit æqualis e b, & utrique communis e d: binæ igitur a e, & e d, trianguli a e d, duabus b e, & e d, triãgnli b e d, sunt æquales altera alteri: basis quoque d a, basi d b, per hypothesin est æqualis. Angulus igitur a e d, æquus est per octauã primi, angulo b e d: & proinde uterque rectus, per decimam ipsius primi diffinitionem. Recta igitur g h, rectam a b, bifariam & ad rectos angulos intersecat, in dispescente itaque g h, erit centrum ipsius a b c, circuli, per corollariũ primæ huius tertij. Haud dissimili uia ostendetur, eiusdem circuli centrum fore in recta k l. In utraque igitur & g h, & k l, est centrum dati circuli a b c, & in puncto



propterea utrique communi. Atqui nullum aliud punctum habent commune, præter ipsum d: punctum igitur d, centrum est ipsius a b, circuli. Si ergo intra circulum suscipiatur punctum aliquod: & quæ sequuntur reliqua. Quod oportuit demonstrasse.

Θεώρημα θ, Πρόθεσις ι.

Κύκλος τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Theorema 9, Propositio 10.

Irculus circulum in pluribus duobus punctis non secat. 10

ORONTIVS. ¶ *Secet enim (si possibile sit) circulus a b c, circulũ d e f, in pluribus duobus punctis, hoc est in punctis b, c, e, f. Et suscipiatur centrum ipsius circuli a b c, per primam huius, sitque illud g: & connectantur g b, g c, g e, & g f, rectæ, per primũ postulatum. Cùm igitur punctum g, sit centrum circuli a b c, erunt g b, g c, g e, & g f, adinuicẽ æquales, per decimamquintam primi libri diffinitionem. Et quoniam b, c, e, f, sunt communes utriusque circuli sectiones, per hypothesin erit punctum g, utcunque susceptum intra circulũ d e f. Ab ipso itaque puncto g, in eundem circulum d e f, cadunt plures quàm duæ rectæ lineæ inuicẽ æquales, utpote g b, g c, g e, & g f. Erit ergo punctum g, centrum eiusdẽ circuli d e f, per antecedentem nonam propositionem. Atqui idem punctum g, centrum est ipsius a b c, circuli. Duorum itaque circulorũ*

Hæc rursum aliter potuisset ostẽdi, sed hanc potiorẽ existimo demõstrationẽ.



a b c, & d e f, sese inuicem secantium, idem erit centrum: quod per quintam huius tertij, non est possibile. Circulus ergo, circulum in pluribus duobus punctis non secat, Quod ostendere fuerat operæpretium.

Θεώρημα ι, Πρόθεσις ια.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα

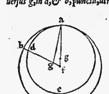
κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Theorema 10, Propositio 11.

SI bini orbes se introrsum adinuicem tetigerint, suscipianturque eorum centra: ad eorum centra applicata recta linea & eiecta, in contactum circulorum cadit.

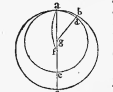
ORONTIVS. Duo enim circuli a b c, & a d e, se introrsum adinuicem tangant, in puncto quidem a: sitque ipsius a b c, circuli cẽtrum f, ipsius uerò a d e, centrum g. Dico quòd ad centra f, g, applicata recta linea, & eiecta, id est, in directum utrinque producta: cadit in contactum a. Si enim nõ ceciderit in punctum a: cadet igitur alio. Cadat ergo (si possibile sit) ut eiecta uersus g, in d, & b, puncta, utranque dirimens circumferentiam, & connectatur a f, & a g, recta, per primum postulatũ. Triangulum erit igitur a g f: & duo propterea latera a g, & g f, erunt maiora reliquo a f, per uigesimam primi. Atqui ipsi a f, æqualis est f b, (utraque enim à centro f, in circumferentiam circuli a b c) & a g, igitur & g f, maiores sunt eadem f b. Tollatur f g, utrisque in æqualibus communis: reliqua igitur a g, reliqua g b, maior erit, per quintam communem sententiam. Ipsi porrò a g, æqualis est g d, (utraque enim à centro g, in circumferentiam ipsius a d e, circuli) & g d, igitur maior erit ipsa g b. quæ enim sunt æqualia, eiusdem sunt æquè maiora: per sextæ communis sententiæ conuersionem. Ipsa porrò g d, pars est ipsius g b: pars igitur erit maior toto, contra nonam communem sententiam. Cadit igitur f g, eiecta, in contactũ a.

Demõstratio ab impossibili.



Cogimur in hac demonstratione, centrum interioris circuli extra proprium locum (ut oculari satisfaciamus inspectioni) uel inuiti collocare: quanquam id uideatur absurdum. Nam ex hypothesi, necessum est lineam f g b, trãsire per centra f g. nõ poterit itaque recta f g b, ad aliud punctum quàm ad a, peruenire, & simul transire per g, quin ipsum g, centrum à suo loco dimoueatur: aut connexa a f, linea, tanquam recta imaginetur. Non erunt enim per aduersarium f g, & g a, in directum constitutæ (alias enim sequeretur propositionis intentio) & proinde inclinabuntur adinuicem: & unà cum a f, triangulum a g f, de necessitate constituent. Quæ enim impossibilia sunt, depingi minimè possunt: sed solo intellectuali discursu concipienda sunt. Intelligendum est itaque centrum (quanuis dimoueatur) à proprio non recedere loco: aut linea à f, ac si recta foret imaginanda est. Vt in hac secũda figu-

Alia figuræ dispositio.



Problema 13, Propositio 14.

IN circulo rectæ lineæ sunt æquales, quæ æqualiter distant à centro: & si æqualiter distăt à centro, æquales adinuicē sunt.

Prima pars theorematis.

ORONTIVS. *Sint in circulo a b c d, cuius centrum e, binæ rectæ lineæ a b, & c d, inuicem primùm æquales. Aio quòd & æqualiter distant à centro e. Diuidatur enim a b, bifariam in pūcto f, & c d, in puncto g, per decimam primi: & connectantur e a, e b, e c, e d, e f, & e g, lineæ rectæ, per primum postulatum. Recti sunt itaque anguli qui circa f, & g, puncta consistunt: & ipsæ e f, & e g, in easdem a b, & c d, perpendiculares, per tertiam huius tertij. Et quoniam a b recta, æqualis est per hypothesin ipsi c d, & a e, ipsi e d, æqualis: duo itaq; latera b a, & a e, triăguli b a e, duobus lateribus e d, & d c, trianguli e d c, sunt æqualia alterū alteri: basis quoq; b e, basi e c, itidem æqualis est. Angulus igitur qui ad a, angulo qui ad d, per octauam primi est æqualis. Rectus præterea a f e, recto e g d, per quartum postulatum æquatur. Bina ergo triangula a f e, & d e g, habent duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, quod sub uno æqualium subtenditur angulorum, utpote a e, ipsi e d. Reliqua igitur latera reliquis lateribus habebunt æqualia alterum alteri, per uigesimamsextam primi. Sed a f, ipsi d g, æqualis est (sunt enim ipsarum a b, & c d, adinuicem æqualium dimidium) reliqua igitur e f, reliquæ e g, est æqualis. Quæ igitur in a b, & d c, rectas, ex centro e, deducuntur perpendiculares e f, & e g, æquales sunt adinuicem: distant ergo a b, & d c, rectæ æqualiter ab eodem centro e, ipsius a b c d, circuli, per quartam huius tertij diffinitionem.*



Secūda pars, conuersa præcedentis.

Esto autem e f, ipsi e g, æqualis, hoc est, distent a b, & c d, æqualiter ab eodem centro e. Dico quòd a b, æqualis est ipsi c d. Eisdem nanque constructis, quoniam triangula a e f, & d e g, sunt rectangula, & qui ad f, & g, consistunt anguli recti: quæ igitur ex a f, & f e, describuntur quadrata, æqualia sunt ei quod ex a e: similiter & ea quæ fiunt ex d g, & g e, ei quod ex d e, æqualia per penultimam primi. Porrò a e, ipsi d e, est æqualis: & ex ipsis igitur descripta quadrata inuicem æqualia, per corollarium 46, ipsius primi. Quæ autē æqualibus sunt æqualia, ea sunt æqualia adinuicem, per primam communem sententiam. Quæ igitur ex a f, & f e, fiunt quadrata, æqua sunt eis quæ ex d g, & g e: quorum id quod ex f e, ei quod fit ex g e, per idem corollarium est æquale. His itaque subtractis, reliquum quod ex a f, reliquo quod ex d g, fit quadrato, per tertiam communem sententiam est æquale. Et proinde latus a f, latera d g, respondenter æquale. Ipsius porrò a f, dupla est a b, & c d, ipsius d g, itidem dupla: quæ autem æqualium duplicia sunt, æqualia sunt adinuicem, per sextam communem sententiam. Aequalis est igitur a b, ipsi c c. In circulo itaque rectæ lineæ sunt æquales, quæ æqualiter distant à centro: & si æqualiter distant à centro, æquales adinuicem sunt. Quod receperamus ostendendum.

Θεώ-

Θεώρημα ιδ, Πρόθεσις ιε.

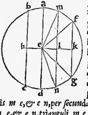
Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Theorema 14, Propositio 15.

IN circulo, maximus quidem est dimetiens: aliarum autem semper propinquior centro, remotiore maior.

ORONTIUS. Sit in circulo a b c d, cuius centrum e, dimetiens a d: & ipsi centro uicinior b c, remotior autē f g. Aio quòd a d, quæ per centrum, maxima est: b c, uerò, maior ipsa f g. Diuidatur enim b c, bifariam in puncto h, & f g, in puncto k, per decimam primi: & connectantur e h, & e k, per primum postulatum. Perpendicularis erit igitur e h, super b c, atque e k, super f g: per tertiam huius tertij. Maior erit itaque perpendicularis e k, ipsa e h, per quartam huius diffinitionem. Secetur itaque à maiori e k, ipsi e h, minori æqualis, per tertiam primi; sitque e l: & per datum punctum l, datæ rectæ lineæ f g, parallela ducatur m n: per trigesimam primā primi. cadet igitur e l, ad perpēdiculum super m n: per corollarium uigesimænonæ ipsius primi. Et quoniam e h, est æqualis ipsi e l: distant igitur b c, & m n, æqualiter à centro e, per quartam huius tertij diffinitione: súntque per decimāquartā ipsius tertij, inuicem æquales. Connectantur denū per primum postulatum, e f, e g, e m, & e n, quæ per circuli diffinitionem, æquales sunt adinuicem. Cùm igitur e a, ipsi e m, & e d, ipsi e n, per circuli diffinitionem sit æqualis: tota a d, binis m e, & e n, per secundam communem sententiam æquabitur. Binæ porrò m e, & e n, trianguli m e n, sunt maiores reliqua m n, per uigesimam primi. & a d, igitur, maior est eadem m n: & ipsa consequenter b c, maior, per conuersam sextæ atque septimæ communis sententiæ interpretationem. Rursum quoniam æqualis est e m, ipsi e f, & e n, ipsi e g: bina igitur latera m e, & e n, trianguli m e n, binis lateribus f e, & e g, trianguli f e g, sunt æqualia alterum alteri: & qui sub m e n, angulus, eo qui sub f e g, maior (rectæ siquidem e f, & e g, coincidunt inter e m, & e n, ipsum angulum m e n, diuidētes) basis igitur m n, per uigesimāquartam primi, basi f g, maior est. Ipsi porrò m n, æqualis est b c. & b c igitur, est eadē f g, maior: quæ enim sunt æqualia, eiusdem sunt æquè maiora. Ostēsum est autem, quòd & a d, ipsa b c, maior est. Dimetiens itaque a d, est omnium maxima: & b c, cētro uicinior, ipsa f g, remotiore maior. Quod oportuit ostendisse.

Construitur figura.



Demonstratur theorema.

Θεώρημα ιε, Πρόθεσις ις.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ

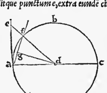
ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

Theorema 15, Propositio 16.

QVæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadit: & in locum inter ipsam rectam lineam & circunferentiam, altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus, omni angulo acuto rectilineo maior est: reliquus autem, minor.

Pars prima theorematis.

ORONTIUS. ¶Esto circulus *a b c*, & illius centrũ *d*, dimetiẽs uerò *a c*, & ab *a*, dimetientis extremitate, ad angulos rectos excitetur *a e*, per undecimam primi. Dico primũ, quòd *a e*, recta extra ipsum cadit circulũ. Suscipiatur enim in ipsa *e a*, contingens aliquod punctũ, sitque illud *e*: & conectatur *e d*, per primũ postulatũ. Triangulũ erit igitur *e a d*: omnis porrò trianguli tres interiores anguli, binis rectis sunt æquales, per trigesimamsecundã primi. rectus est autẽ qui ad *a*, per constructionẽ. Reliqui igitur qui ad *e*, & *d*, sunt anguli, uni recto sunt æquales: & eorũ propterea quilibet, ipso recto qui ad *a*, minor. In triangulo autem maior angulus, sub maiori latere subtenditur, per decimamnonam primi: maior est igitur *d e*, ipsa *a d*, quæ est ipsius dati circuli semidiameter. Egreditur ergo *d e*, circunferentiam ipsius *a b c*, circuli: caditque punctum *e*, extra eundẽ circulum *a b c*. Haud dissimilis erit, cæterorum punctorum ipsius *a e*, demonstratio. Cadit ergo tota *a e*, extra datum circulum *a b c*.



Pars secũda.

¶Aio rursum, quòd inter rectam *a e*, & circũferentiam *a b*, non cadit altera recta linea. Si enim id fuerit possibile, esto *a f*: & ad datam rectam lineam *a d*, ad datũmque in ea punctũ *d*, dato angulo rectilineo *e a f*, æqualis angulus rectilineus constituatur *a d g*, per uigesimamtertiam primi.. Vterque igitur *a d g*, & *g a d*, pars erit ipsius *e a d*: & recto propterea minor. In rectas itaque *a f*, & *d g*, recta incidit *a d*, efficiens interiores, & in eadem parte angulos binis rectis minores: ipsæ igitur *a f*, & *d g*, in infinitum productæ, tandem concurrent, per quintum postulatũ: cõueniant ergo ad punctũ *g*. Triangulũ est itaque *a g d*, cuius tres interiores anguli binis rectis, per eandẽ trigesimam secũdam primi sunt æquales. & qui sub *g a d*, & *a d g*, anguli, uni recto, hoc est, ipsi *e a d*, coæquantur, (datus est enim *a d g*, æqualis ipsi *e a f*.) Reliquus igitur *a g d*, rectus est: & maior ꝓpterea utroq;, & *g a d*, & *a d g*. Vnde rursũ *a d*, semidiameter, maior est ipsa *d g*, per eadẽ decimãnonam primi. Cadit igitur punctũ *g*, intra circulũ *a b c*: ergo & *a f*, recta (in qua punctũ *g*) circulũ ipsum interfecat, utpote in *f*. Nõ cadit itaque *a f*, recta, inter rectam *a e*, & circunferentiam *a b*.

Tertia pars de angulo cõtingentiæ.

¶Dico tandẽ, ꝙ angulus *b a d*, ipsius *a b c*, semicirculi, omni acuto & rectilineo angulo

gulo maior est: reliquus autem (utpote, b a e, minor. Cùm enim angulus e a d, sit rectus, & diuisus à sola circũferentia a b, inter quam & rectam a e, non cadit altera recta linea (uti nunc ostẽsum est) non potest ipse angulus b a e, bipartiri: & proinde non minuetur neque augebitur consequenter ipse b a d. Igitur angulus b a d, sub a b, circunferentia, & a d, recta comprehensus, omni acuto rectilineo maior est angulo: b a e, uerò, qui sub eadem circunferentia & a e, recta continetur (quẽ angulum contingentiæ nominare consueuimus) omni itidem acuto & rectilineo angulo minor est. Quæ omnia fuere demonstranda.

Corollarium.

Quæ igitur ab extremitate dimetientis dati circuli, ad rectos ducitur angulos, ipsum circulum tangit, idque in uno tantũmodo pũcto: ad duo enim pũcta adplicata recta linea, per secundam huius tertij, cadit intra datum circulum.

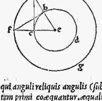
Πρόβλημα β, Πρότασις ιζ.

Ἀπὸ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Problema 2, Propositio 17.

17 A Dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

ORONTIVS. Sit a, punctum datum, à quo oporteat in datum circulum b c d, contingentem rectam lineam ducere. Inueniatur ipsius b c d, circuli centrum, per primam huius tertij, sitque illud e: & connectatur a e, recta, per primum postulatum. quæ cùm ab interiore puncto e, ad exterius punctum a deducatur, secabit b c d, circunferentiam: secet igitur in pũcto b. Et centro e, interuallo autem e a, circulus describatur a f g, per tertiũ postulatũ. Postmodum à puncto b, datæ rectæ lineæ a e, ad rectos angulos excitetur b f, per undecimam primi: & connectatur e f, per primũ postulatum, quæ eandem circunferentiam b c d, secet rursum in puncto c. Connectatur demum a c, per idem primum postulatum. *Constructio figuræ.*



Dico quòd a c, contingit circulum b c d. Cùm enim per circuli diffinitionem, æqualis sit a e, ipsi e f, & b e, ipsi e c: erunt bina latera a e, & e c, triãguli a e c, æqualia duobus f e, & e b, trianguli f e b: & communẽ comprehendunt angulum qui ad e. Basis igitur a c, basi f b, & triangulum a e c, triangulo f e b, & reliqui anguli reliquis angulis (sub quibus æqualia subtenduntur latera) per quartam primi coæquantur. æqualis est igitur angulus a c e, angulo e b f. Angulus porrò e b f, rectus est: igitur & qui sub a c e, rectus. Et quoniã e c, semidiameter est ipsius b c d, circuli, & ab illius dimetientis extremitate, eadem a c, ad rectos excitata est angulos: ipsa ergo a c, tangit circulum b c d, per corollarium decimæsextæ huius tertij. Igitur à dato puncto a, dato b c d, circulo, contingentem rectam lineam duximus. Quod facere oportebat. *Demõstratio*

Θεώρημα ιε, Πρόθεσις ιη.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην.

Theorema 16, Propositio 18.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à centro autem in contactum coniuncta fuerit aliqua recta linea: coniũcta, perpendicularis erit in contingente.

Hæc aliter ostẽdi potest, sed hic demõstrãdi modus præstat.

ORONTIUS. *Sit datus circulus a b c, quem tangat recta linea d e, in puncto quidem c: sitque centrum ipsius circuli f; & connectatur f c, recta, per primum postulatum. Dico quòd f c, perpendicularis est ipsi d e. Si enim f c, non fuerit perpendicularis ipsi d e, erũt d c f, & f c e, anguli, per decimæ diffinitionis primi libri conuersionem, inæquales, & proinde alter recto maior, alter uerò minor: nam d c f, & f c e, anguli, per decimam tertiã primi binis rectis sunt æquales. Esto maior, (si fuerit possibile) & obtusus f c e: erit itaque d c f, acutus. Et quoniam recta d e, tangit circulum a b c, per hypothesin: ipsum igitur non secat circulum. Cadit itaque circunferentia b c, inter d c, & c f, lineas rectas: & proinde acutus & rectilineus angulus d c f, maior erit angulo semicirculi b c f, ex circunferentia b c, & recta c f, comprehenso. Dabitur itaque rectilineus & acutus angulus, maior angulo semicirculi: contra decimamsextam huius tertij propositionem. Angulus ergo d c f, non est recto minor: similiter ostendetur, quòd nec recto maior. est igitur rectus, & qui sub f c e, cõtinetur angulus, itidẽ rectus: & proinde recta f c, in ipsam d e, perpendicularis est, per decimam primi diffinitionem. Si circulũ itaque tetigerit aliqua recta linea, &c. ut in theoremate. Quod demonstrandum fuerat.*



Θεώρημα ιζ, Πρόθεσις ιθ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

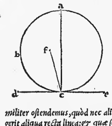
Theorema 17, Propositio 19.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ipsi tangenti ad angulos rectos recta linea quædam excitetur: in excitata erit centrum circuli.

ORONTIUS. *Esto circulus a b c, quem rursum tangat recta d e, in pũcto c: & à dato puncto c, datæ rectæ lineæ d e, ad rectos excitetur angulos c a, per undecimam primi. Dico quòd in c a, est centrũ ipsius dati circuli a b c.*

a b c.si enim non fuerit in recta c a: erit alicubi. Esto (si possibile sit) in puncto f: & connectatur f c, recta, per primum postulatum. Et quoniam recta quædam linea d e, tangit per hypothesin circulum a b c, à centro autē f, in contactum c, coniuncta erit f c, recta linea: cōiuncta igitur f c, perpendicularis erit in contingente d e, per antecedentem decimamoctauam huius tertij propositionem. Rectus erit igitur uterque angulorum d c f, & f c e. Atqui per cōstructionem angulus d c a, rectus est: suntq; recti omnes inuicē æquales, per quartum postulatum. Aequus erit igitur angulus d c a, ipsi angulo d c f. Est autem d c f, pars ipsius anguli d c a: recta siquidem f c, cadit intra circulum, ac inter d c, & e a, rectas, diuiditque propterea ipsum angulum d c a. Totus igitur angulus d c a, suæ parti d c f, æquabitur: quod per nonam communem sententiam est impossibile. Centrū itaque circuli a b c, non est in puncto f, haud dissimiliter ostendemus, quòd nec alibi: præter quàm in a c. Si circulum ergo teti gerit aliqua recta linea: & quæ sequuntur reliqua. Quod oportuit demōstrasse.

Demonstratio ab impossibili.



Θεώρημα ιη, Πρόθεσις κ.

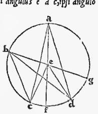
Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Theorema 18, Propositio 20.

20 In circulo angulus qui ad centrum, duplus est eius qui ad circunferentiam: quando anguli eandem circunferentiam habuerint.

ORONTIUS. *Sit a b c, circulus: ad cuius centrum e, sit angulus c e d, ad circunferentiam autem c a d, & utriusque basis eadem circunferentia c d. Aio quòd angulus c e d, ipsius anguli c a d, duplus est. Connectatur enim a e, per primum postulatum: & per secundum postulatum, directè producatur in f. Cùm igitur per circuli diffinitionem, a e, sit æqualis c e: æquus est angulus e a c, ipsi angulo c c a, per quintam primi. Anguli itaque e a c, & e c a, simul sumpti, alterutrius eorum duplices sunt: utpote ipsius e a c. Exterior porrò angulus c e f, binis interioribus & ex opposito e a c, & e c a, per trigesimamsecundam primi est æqualis: quæ autem sunt æqualia, eiusdem duplicia sunt, per conuersam sextæ communis sententiæ. Duplus est igitur c e f, angulus, ipsius e a c. Et proinde angulus f e d, ipsius e a d, anguli duplus est. Totus itaque angulus c e d, totius anguli c a d, consequēter est duplus. Si enim*

Quando angulus qui ad circunferentiam includit centrum.



æquè multiplicibus, addantur æquè multiplicia: æquè itidem multiplicia resulta bunt. ¶ *Quòd si anguli qui ad circumferentiam, fuerit extra cētrum ipsius circuli, ueluti c b d: idem nihilominus subsequetur. connexa enim recta b e, per primum postulatum, & directè producta in g, per secundum: concludemus ueluti suprà, ex eadem quinta & trigesimasecunda primi, angulum c e g, duplum fore ipsius anguli c b e: quorum d e g, pars ipsius anguli c e g, duplus rursum est partis ipsius c b e, utpote anguli e b d. Reliquus igitur an gullus c e d, qui ad centrum, duplus itidem est reliqui c b d, qui ad circūferentiam dati constituitur circuli. In circulo itaque angulus qui ad cētrum, duplus est eius qui ad circumferētiam: quando ipsi anguli communem basin eandem circumferentiam habuerint. Quod fuerat ostendendum.*

Quādo idem angulus qui ad circūferētiā non capit centrū circuli.

Θεώρημα ιθ, Πρόθεσις κα.

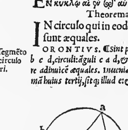
Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Theorema 19, Propositio 21.

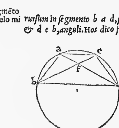
IN circulo qui in eodem segmento sunt anguli, sibi inuicem sunt æquales. 21

ORONTIVS. ¶*Sint primū in segmēto semicirculo maiori c a d, dati a b c d, circuli: āguli c a d, & d b c. Dico eosdē angulos c a d, & d b c, fore adinuicē æquales. Inueniatur enim centrū ipsius a b cd, circuli, per primā huius tertij, sitq; illud e: & cōnectantur e c, & e d, per primū postulatū. Cū igitur angulus c e d, ad cētrū existat circuli, c a d, uerò angulus ad circūferētiam, habeatq; basin cōmunē eandē circūferentiā c d: angulus ꝓpterea c e d, duplus est, per antecedētē uigesimā propositionē, anguli c a d. Angulus itaq; c a d, dimidius est ipsius anguli c e d. Et proinde præfatus angulus c e d, duplus est ipsius anguli d b c: atq; idē angulus d b c, eiusdēc e d, anguli dimidius. Quæ autē eiusdē sūt dimidiū, ea sunt adinuicē æqualia: per septimam communē sententiā. Aequus est igitur angulus c a d, angulo d b c.* ¶ *Sint rursum in segmento b a d, semicirculo minori, ipsius a b c d, circuli, b a d, & d e b, anguli. Hos dico fore similiter æquales. Connectatur enim recta a e, per primum postulatum: sitque ipsarum a d, & b e, sectio f. Erit igitur a c e, segmētum maius, & qui in eodem segmento maiori sunt anguli a b e, & e d a, per primam partem iam demonstratam, adinuicē æquales. Et quoniam trianguli a b f, interiores & qui ex opposito sunt anguli a b f, & f a b, extrinseco b f d, coæquantur angulo: necnon & duo anguli e d f, & f e d, ipsius d e f, triāguli, eidem extrinsico b f d: sunt itidem æquales, per trigesimamsecundam*

De segmēto semicirculo maiori.



De segmēto semicirculo minori.



primi. Duo igitur anguli a b f, & f a b, duobus angulis e d f, & f e d, sunt per primam cõmunem sententiam æquales. A quibus si demantur æquales anguli a b f, & e d f: reliquus b a f, reliquo d e f, hoc est, b a d, ipsi d e b, per tertiam commun. sententiam erit æqualis. Idẽ quoque demõstrare licebit, de angulis in semicirculo constitutis. In circulo igitur, qui in eodem segmento sunt anguli, sibi inuicem sunt æquales. Quod receperamus ostendendum.

Θεώρημα κ, Πρόθεσις κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Theorema 20, Propositio 22.

22 IN circulis quadrilaterorum existentium anguli, qui ex opposito: duobus rectis sunt æquales.

ORONTIVS. *Sit in a b c d, circulo, quadrilaterum a b c d: dico, angulos qui ad a & c, similiter qui ad b, & d, ex opposito constituuntur, duobus rectis coæquari. Connectantur enim a c, & b d, rectæ, per primum postulatum. Triangulum est igitur a b c. Et quoniam angulo b a c, æquus est angulus c d b, per antecedentẽ uigesimamprimam huius tertij: sunt enim in eodem segmento b a d c. Angulo rursum a c b, æqualis est angulus b d a, per eandem uigesimamprimam huius tertij: in eodem nanque segmento consistunt a d, c b. Totus igitur qui sub a d c, continetur angulus, binis angulis b a c, & a c b (nempe suis partibus integralibus) coæquatur. Adijciatur utrisque æqualibus, cõmunis angulus a b c. duo igitur anguli a b c, & c d a, tribus angulis b a c, a c b, & c b a, ipsius a b c, trianguli, sunt per secundam communem sententiam æquales. Eisdem porrò tribus angulis eiusdẽ a b c, trianguli, duo recti sunt æquales anguli: omnis siquidem trianguli, tres interiores anguli binæ sunt rectis æquales, per trigesimamsecundam primi. Qui igitur ex opposito sunt anguli a b c, & c d a, per primam communem sententiam, sunt æquales duobus rectis. Nec dissimiliter ostendemus, quòd anguli b a d, & d c b, duobus itidẽ rectis coæquantur. Igitur in circulis quadrilaterorum existentiũ anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.*



Θεώρημα κα, Πρόθεσις κγ.

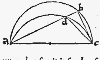
Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Theorema 21, Propositio 23.

23 SVper eadem recta linea, duæ sectiones circulorum similes, & inæquales, non constituentur ad easdẽ partes.

ORON-

ORONTIVS. ¶ *Super eadem nanque recta linea a c, binæ & inæquales circulorum sectiones a b c, quidem maior, minor autem a d c, ad easdem partes b, d, constituantur.* Dico quòd *ipsæ sectiones non sunt similes, & simul inæquales.* Si enim *id fuerit possibile: extendatur recta quædam linea a d b, quæ secet utranque sectionem, maiorem quidem in b, & ipsam minorem in d: & connectantur b c, & c d, rectæ, per primum postulatũ. Triangulum erit igitur b c d, cuius unum latus b d, producitur in a: exterior igitur angulus a d c, interiore & ex opposito c b d, maior est, per decimamsextam primi.* Quòd *si segmentum a d c, fuerit ipsi a b c, simile: æquus erit angulus a d c, eidem angulo c b d, per ultimam huius tertij diffinitionem: similes nanque sectiones circuli sunt, quæ angulos æquos suscipiunt. Esset igitur angulus a d c, maior angulo c b d, atque eidem æqualis: quod est impossibile.* Super *eadem itaque recta linea, duæ sectiones circulorum similes, & inæquales non constituentur ad easdem partes.* Quod *ostendere fuerat operæpretium.*



Θεώρημα κβ, Πρόθεσις κδ.

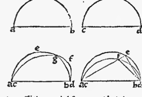
Τ Α ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Theorema 22, Propositio 24.

SVper æqualibus rectis lineis similes circulorum sectiones constitutæ, sibi inuicem sunt æquales. 24

ORONTIVS. ¶ *Constituantur enim super æqualibus rectis lineis a b, & c d, similes circulorum sectiones a e b, & c f d.* Dico quòd *sectio a e b, sectioni c f d, est æqualis. Comparatis nanque adinuicem ipsis a e b, & c f d, sectionibus, & puncto c, supra punctum a, collocato, extensáque recta linea c d, in directum ipsius a b: congruet punctum d, ipsi puncto b. quæ enim sunt æqualia, sibimetipsis conueniunt, per octauæ communis sententiæ conuersionem. Conueniente autem recta c d, ipsi a b: conueniet & c f, dcircumferentia, ipsi a e b, & illi consequenter erit æqualis. Tunc enim super eadem recta & commum linea a b, vel c d, duæ circulorum sectiones constituentur similes: igitur & æquales, per uigesimamtertiam huius. Aequalis est igitur a e b, ipsi c f d.* ¶ Quòd *si non fueris contentus hac demonstratione, & dixeris forsan circunferentiam c f d, ipsi a e b, minimè conuenire: tunc vel altera alteram secabit, uel una cadet intra reliquam. Secent se primùm (si possibile sit) in pũcto g. Et quoniam si secant iam, in cõmunibus punctis a, b, uel c, d: secabunt sesé inuicem circuli, quorũ sunt sectiones, in pluribus duobus pũctis. quod per decimam huius tertij, est impossibile.* Quòd *si una ceciderit intra reliquam, utpote c f d, intra a e b: idem*

Alia eiusdẽ theorematis ostensio



idem quod in proxima sequetur inconueniens, uelut ex ipsa potes elicere figura. Exterior enim angulus qui ad f, trianguli a f b, aut e f d, maior erit intrinseco & ex opposito qui ad e, per decimamsextam primi: ac eidem æqualis, per similium sectionum diffinitionem, quod non est possibile. Cõgruit itaque circunferentia c f d, ipsi a e b: quemadmodum & recta c d, ipsi a b. quæ autem sibimetipsis conueniunt, æqualia sunt adinuicem: per octauam communem sententiam. Aequalis est igitur sectio a e b, ipsi c f d. Igitur super æqualibus rectis lineis, similes circulorum sectiones cõstitutæ, sibi inuicem sunt æquales. Quod receperamus ostendendum.

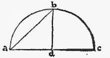
Πρόβλημα γ, Πρότασις κε.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

Problema 3, Propositio 25.

25 Circuli sectione data, describere circulum, cuius est sectio.

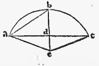
ORONTIUS. ¶ Esto data circuli sectio a b c, cuius centrũ oporteat inuenire: hoc est, circulum cuius est sectio describere. Secetur itaque a c, recta bifariam in puncto d, per decimam primi. Et per undecimam eiusdẽ primi, à puncto d, ipsius a c, rectæ lineæ, perpendicularis excitetur d b: & connectatur a b, recta, per primum postulatum. Triangulum erit igitur a b d, cuius angulus b a d, ipsi angulo d b a, erit æqualis, aut eo minor, uel eodem angulo maior. Si æqualis (ut in hac prima figura) æqualis erit a d, ipsi d b, per sextam primi. Eidẽ porrò a d, æqualis est d c, per constructionem: & d b, igitur ipsi d c, per primam communẽ sententiam erit æqualis. Tres itaque a d, d b, & d c, erunt inuicẽ æquales. Cadent ergo à puncto d, in circunferentiam a b c, plures quàm duæ rectæ lineæ æquales: erit igitur punctum d, centrum circuli, cuius a b c, est sectio, per nonam huius tertij.



Prima huius ostẽsionis differentia.

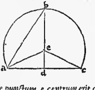
¶ At si angulus b a d, minor fuerit angulo d b a, (ut in secunda figuræ dispositione) constituatur ad datum punctum a, datæ rectæ lineæ a b, dato angulo rectilineo d b a, æqualis angulus rectilineus b a e, per uigesimamtertiam primi. Et quoniam trianguli a b d, angulus qui ad d, rectus est: igitur & qui ad b, minor est recto, per tirgesimamsecundam primi. Angulo autem d b a, datus est æqualis b a e: & b a e, igitur angulus recto minor est. Incidit itaque recta linea a b, in a e, & b d, rectas, efficiens interiores & in eadem parte angulos, duobus rectis minores: conuenient igitur a e, & b d, in rectũ producta, per quintum postulatum. conueniant ergo ad punctum e: & connectatur e c, recta, per primum postulatum. Cùm igitur angulus e a b, æquus sit an-

Secunda differentia.



gulo a b e:æqualis est a e,ipsi e b,per sextam primi. Rursum quoniam a d,ipsi d c,est æqualis,& d e,utrique communis.bina igitur latera a d,& d e,trianguli a d e,binis lateribus e d,& d c,trianguli e d c,sunt æqualia alterum alteri:& æquales comprehendunt angulos,nempe rectos qui circa d. Basis igitur e c,basi a e,per quartam primi est æqualis.Eidem porro a e, æqualis ostensa est e b:tres igitur a e,e b,& e c,sunt adinuicem æquales. Quare rursum,ex nona huius tertij,punctum e,centrum erit circuli ,cuius a b c,est sectio.

Tertia differentia.



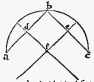
¶Quòd si idem angulus b a d,maior extiterit ipso d b a:idem respondenter cõcludetur. Dato enim rursu angulo b a e ,ipsi d b a, per uigesimamtertiam primi, æquali:concludemus(uelutisuprà)ex sexta primi,e b,fore æqualē ipsi a e,ac eidē a e,ipsā e c,per quartamipsius primi,consequēter æquari.Et proinde punctum e,centrum erit circuli, cuius a b c,sectio est: per nonam huius tertij.

Corollarium.

¶Hinc fit manifestum,in semicirculo angulum b a d,fore æqualem ipsi d b, a,in sectione autem semicirculo minore,minorem:& in maiore,maiorem.

Alia & vniuersalior eiusdem problematis ostẽsio

¶EST ET ALIVS modus uniuersalis inuenẽdi præfatũ centrũ,cuicũque sectioni datæ indifferenter adcommodus. Assumantur itaque in data circumferentia siue sectione a b c,tria utcunque contingentia puncta:sintque a, b,c. Connectantur deinde a b,& b c,rectæ,per primum postulatum.utraque postmodum bifariam diuidatur,per decimam primi: a b,quidem in puncto d , & b c, in puncto e. A punctis autem d,& e,in easdem a b,& b c,perpendiculares excitentur d f,& e f,per undecimam eiusdem primi.



Cùm igitur uterq; angulorum b d f,& b e f,sit rectus:recta quæ ex puncto d,in punctum e,producetur, utrunque diuidet angulum:quæ cùm incidat in d f,& e f,rectas,efficiet propterea interiores & in eadem parte angulos d e f,& e d f,duobus rectis minores. Cõcurrent igitur d f,& e f,productæ,per quintum postulatum:& sese tãdem intersecabũt in eodem puncto f.Et quoniam recta quædam linea d f, quandam rectam lineam a b,bifariam & ad rectos dispescit angulos:in ipsa igitur d f,est centrum circuli.& proinde in e f,recta ,erit eiusdem circuli centrum: per corollarium primæ huius tertij.Est igitur centrum circuli,cuius sectio est a b c , in puncto f,utrique & d f,& e f,communi.Data igitur circuli sectione a b c, describitur cuius circulus est sectio.Quod oportuit ostendisse.

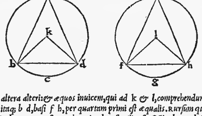
Θεώρημα κγ, Πρόθεσις κς.

EN τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ,ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν, βεβήκασι ,ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις,ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Theorema 23, Propositio 26.

26 IN æqualibus circulis æquales anguli, in æqualibus circunferentiis subtenduntur: etsi ad centra, etsi ad circunferētias deducti fuerint.

ORONTIVS. ¶ *Sint bini circuli a b c d, & e f g h, inuicē æquales, in quibus æquales deducātur anguli, ad eorū quidem cētra k, l, anguli b k d, & f l h, ad circunferētias autē, b a d, & f e h. Dico φ b c d, circūferentia, æqualis est f g h, circūferētiæ. Cōnectātur enī in primis b d, & f h, rectæ, per primū postulatū. Et quoniā per hypothesin circuli a b c d, & e f g h, sunt inuicē æquales: quæ igitur ex eorū cētris prodeūt rectæ lineæ, sunt æquales adinuicē, per*



primā huiꝰ tertij diffinitionem. Duæ igitur b k, & k d, trianguli b k d, duabus f l, & l h, triāguli f l h, sunt æquales altera alteri: & æquos inuicem, qui ad k & l, comprehendunt angulos. Basis itaq; b d, basi f h, per quartam primi est æqualis. Rursum quoniā angulus qui ad a, æquus est angulo qui ad e, similis est sectio b a d, sectioni f e h, per decimam huius tertij diffinitionē: & super æqualibus rectis cōsistūt b d, & f h. Aequalis est igitur sectio b a d, ipsi f e h: super æqualibus enim rectis lineis similes circulorū sectiones cōstitutæ, sibi inuicē sunt æquales, per uigesimāquartam huius tertij. Atqui totus a b c d, circulus, toti e f g h, circulo est æqualis. si ab æqualibus autē circulis, æquales auferantur circūferētiæ: quæ relinquētur æquales erūt, per tertiam cōmunem sentētiam. Aequalis est igitur circūferentia b c d, ipsi f g h. In æqualibus ergo circulis, &c, ut in theoremate. Quod demonstrandum fuerat.

Θεώρημα κγ, Πρότασις κϛ.

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Theorema 24, Propositio 27.

27 IN æqualibus circulis, anguli qui super æquales circunferentias deducuntur, sibi inuicem sunt æquales: & si ad cētra, & si ad circunferentias fuerint deducti.

ORONTIVS. ¶ *Hæc est conuersa præcedentis. sint ergo in circulis æqualibus a b c, & d e f, super æqualibus circūferentijs b c, & e f, anguli b g c, & e h f, ad eorū cētra g, h: ad circūferentias autē, b a c, & e d f. Aio*

Cōuersa præcedentis 26.

quòd angulus qui ad g, æquus est angulo qui ad h, nec non qui ad a, æqualis ei qui ad d. In primis enim, si angulus b g c, angulo e h f, non fuerit æqualis: alter eorum erit maior. Esto maior (si possibile sit) b g c: & ad datam rectam lineam g c, ad datúmque in ea punctum g, dato angulo rectilineo e h f, æqualis angulus rectilineus constituatur k g c, per uigesimam tertiã primi. Maior erit itaque angulus b g c, ipso k g c, angulo: incidétque propterea recta g k, inter b g, & g c, rectas, & proinde secabit circunferẽtiam k c, ipsa b c, minorem. Atquoniam in circulis æqualibus æquales anguli, in æqualibus circunferẽtijs subtenduntur, per antecedentẽ uigesimã sextam propositione: æqualis erit circũferentia k c, ipsi e f. Eidem porrò circunferentiæ e f, æqualis est per hypothesin circunferentia b c. & b c igitur circunferentia, ipsi k c, per primam cõmunem sentẽtiam erit æqualis: maior uidelicet minori, totúmue suæ parti: quod per nonam communẽ sententiam est impossibile. Non est igitur angulus b g c, maior ipso e h f: similiter ostendemus, quòd neque minor. Est igitur æqualis. Et quoniam per uigesimã huius tertij, angulus b a c, dimidius est eius qui ad centrũ g: necnõ & e d f, angulus, illius qui ad centrũ h, dimidius. quæ autẽ eiusdem uel æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem: per septimam communem sententiam. Et angulus igitur b a c, angulo e d f, est æqualis. In æqualibus ergo circulis, anguli qui super æquales circunferentias: & quæ sequuntur reliqua. Quod erat ostendendum.



Θεώρημα κε, Πρότασις κη.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα, τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι.

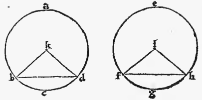
Theorema 25, Propositio 28.

IN æqualibus circulis æquales rectæ lineæ, æquales circunferentias auferunt, maiorem maiori, minorem autẽ minori.

28

[OR]ONTIVS. ❡ Sint bini circuli a b c d, & e f g h, inuicem æ[quales], quorum centra k, l: in ipsis uerò æqualibus circulis, æquales sint rectæ [li]neæ b d, & f h, auferentes circunferentias b a d, quidem & f e h, maiores, minores autem b c d, & f g h. Aio quòd circunferentia b a d, circunferentiæ f e h, est æqualis: necnon & b c d, ipsi f g h. Connectãtur enim b k, & k d, atque f l, & l h, rectæ, per primum postulatum. Cum igitur

igitur ex hypothesi, circuli a b c d, & e f g h, sint æquales, & æquales quoq; ad inuicem erũt quæ ex eorũ centris deducentur lineæ



rectæ, per primam huius tertij diffinitionem. Duæ itaque b k, & k d, trianguli b k d, binis f l, & l h, trianguli f l h, sunt æquales altera alteri: basis quoque b c, basi f h, per hypothesin æqualis. Angulus igitur b k d, angulo f l h, per octauam primi est æqualis. In æqualibus porrò circulis æquales anguli, & ad centra deducti, in æqualibus circumferentijs subtenduntur: per uigesimamsextam huius tertij. Et b c d, igitur circumferentia, ipsi f g h, circumferentiæ, est æqualis. Atqui totus a b c d, circulus, toti e f g h, circulo per hypothesin æquatur: & si ab æqualibus circulis æquales auferantur circumferentiæ, quæ relinquentur æquales erunt, per tertiam communem sententiam. Reliqua igitur circumferentia b a d, reliquæ f e h, est æqualis. Igitur in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, æquales circumferentias auferunt: maiorem maiori, minorem autẽ minori. Quod demonstrare fuerat operæpretiũ.

Θεώρημα κϛ, Πρότασις κθ.

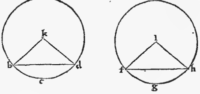
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας, ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσι.

Theorema 26, Propositio 29.

29 IN æqualibus circulis, sub æqualibus circumferentiis, æquales rectæ lineæ subtenduntur.

ORONTIVS. ¶Hæc est conuersa proximè antecedentis propositionis. Sint igitur rursum æquales circuli a b c d, & e f g h, quorum centra k, l: sintque in eisdem circulis, b c d, & f g h, circumferentiæ inuicem æquales. Dico quòd connexæ b d, & f h, rectæ lineæ, æquales sunt adinuicem. Producantur enim ex centro k, rectæ lineæ b k, & k d: necnon ex centro l, rectæ lineæ f l, & l h, per primũ postulatũ. Et

Cõuersa proximę 28.



quoniam ex hypothesi circunferentia b c d, æqualis est circunferentiæ f g h: æqualis est propterea angulus b k d, angulo f l h, per uigesimam septimam huius tertij. Rursum quoniam dati circuli per hypothesin sunt inuicē æquales: & quæ ex eorum centris igitur k & l, per primam huius diffinitionem sunt æquales. Aequales itaque inuicem sunt b k, k d, f l, & l h. Triangula ergo b k d, & f l h, habent duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri: & contentos sub æquis lateribus angulos inuicem æquales. Basis igitur b d, basi f h, per quartam primi est æqualis. In æqualibus ergo circulis, sub æqualibus circunferentiis, æquales rectæ lineæ subtenduntur. Quod oportuit demonstrasse.

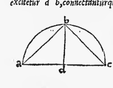
Πρόβλημα δ, Πρόθεσις λ.

Την δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνειν.

Problema 4, Propositio 30.

Datam circunferentiam bifariam discindere. 30

ORONTIVS. *Esto data circunferentia a b c, quam oporteat bifariam discindere. Connectatur ergo recta linea a c, per primum postulatum: quæ bifariam secetur in puncto d, per decimam primi. Et per undecimam eiusdem primi, à dato puncto d, datæ rectæ lineæ a c, ad angulos rectos excitetur d b, connectantúrque à b, & b c, lineæ rectæ, per primum postulatum. Cùm igitur a d, ipsi d c, sit æqualis, & d b, utrique communis: bina itaque latera a d, & d b, trianguli a d b, duobus lateribus b d, & d c, trianguli b d c, sunt æqualia alterum alteri: & æquos inuicem comprehēdunt angulos, nempe rectos. Basis igitur a b, basi b c, per quartam primi est æqualis. Aequales porrò lineæ in eodem circulo, æquales circunferentias auferunt, maiorem maiori, minorem autem minori, per uigesimam octauam huius tertij. Aequalis est ergo a b, circunferentia, ipsi b c. Data itque circunferētia a b c, bifariam discinditur in puncto b. Quod facere oportebat.*



Θεώρημα κζ, Πρόθεσις λα.

Εν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι, μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Theorema 27, Propositio 31.

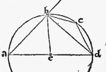
IN circulo, angulus qui in semicirculo est, rectus est: qui autem in maiori segmento, minor recto: qui verò in minori segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto. 31

ORONTIVS. *Sit datus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetiens-*

uerò

uerò a d: descriptus autem in semicirculo angulus, sit a b d. & suscipiatur in b d, circunferentia contingens aliquod punctum, sitque illud c: & per primũ postulatum, connectantur rectæ lineæ e b, b c, & c d. Dico primum, quod angulus a b d, rectus est. Extendatur enim, per secundum postulatum, a b, recta in directum, ucrsus f. Cùm igitur æqua is sit a e, ipsi e b, per circuli diffinitionem: æquus erit angulus e a b, ipsi angulo a b e, per quintam primi. Et proinde æqualis est angulus e b d, ipsi angulo b d e: æqualis siquidem est e b, recta ipsi e d, per eandem circuli diffinitionem. Totus itaque angulus a b d, binis angulis b a d, & a d b, est æqualis. Eisdem porrò angulis b a d, & a d b, æquus est exterior angulus d b f, per trigesimamsecundam primi. Duo itaque anguli a b d, & d b f, eisdem angulis b a d, & a d b, sunt æquales: igitur & æquales adinuicem, per primam cõmunem sententiam. Recta igitur b d, incidens super a f, efficit utrobique angulos adinuicem æquales: ergo rectos, per decimam ipsius primi diffinitionẽ. Rectus est igitur angulus a b d, in dato consistens semicirculo.

Prima theorematis pars.



¶ Dico insuper, quod angulus qui ad a, existẽs in maiori segmẽto b a d, recto minor est. Trianguli siquidẽ a b d, tres anguli, binis rectis per trigesimamsecundam primi sunt æquales. Rectus est autẽ qui ad b, (ueluti nũc ostẽdimus) reliqui igitur qui ad a, & qui ad d, uni recto sunt æquales: & proinde uterque recto minor. ¶ Aio cõsequenter, quod & angulus qui ad c, in segmento b c d, semicirculo minori, maior est recto. Nam a b c d, quadrilaterũ est, & in dato cõsistẽs circulo. In circulis porrò quadrilaterorũ existentiũ, anguli qui ex opposito duobus rectis sunt æquales, per uigesimamsecũdam huius tertij. Qui igitur ad d, & c, existunt anguli, binis rectis sunt æquales. Angulus porrò qui ad a, recto minor ostẽsus est: igitur & qui ad c, hoc est, sub b c d, cõtinetur angulus, recto maior est. ¶ Dico tandem, quòd angulus maioris segmenti b a d, utpote a b c d, sub a b, recta, & circũferentia b c d, comprehensus, maior est recto. Minoris autem segmenti angulus, ueluti c b d, sub eadem b c d, circunferentia & recto b d, comprehensus, recto minor est. Anguli enim rectilinei a b d, & d b f, recti sunt: caditque b d, recta intra datum circulum, per secundam huius tertij. Eadem itaque recta b d, diuidit ipsum angulum sub a b, recta, & b c d, circunferentia cõprehensum: & proinde rectus angulus a b d, eiusdẽ anguli sub a b, recta, & circũferentia b c d, cõprehensi fit pars. Omne porrò totũ, est sua parte maius, per nonam cõmunem sentẽtiam. Datus igitur segmenti maioris angulus, sub a b, recta, & b c d, circũferentia contentus, recto maior est. ¶ Rursum, quoniam recta b d, cadit intra datum circulũ, & b f, extra: diuidit itaque circũferentia b c d, ipsum angulum rectum d b f. Et proinde datus angulus sub b d, recta, & eadem circunferentia b c d, comprehensus,

Pars secũda.

Pars tertia.

Quarta eius dem theorematis pars.

Pars quinta & ultima.

pars

pars est ipsius anguli recti d b f. Omnis autem pars minor est toto, per ipsius nonæ communis sententiæ conuersionem. Angulus igitur segmenti minoris, sub d b, recta, & b c d, circunferentia comprehensus, minor est recto. In circulo itaque angulus qui in semicirculo est: & quæ sequuntur reliqua. Quod oportebat ostendere.

Corollarium primum.

¶ Ex hac, & decimasexta huius tertij propositione fit manifestum, quòd tametsi in mixtis angulis, sub recta linea & circuli circunferentia compræhensis, detur minor atque maior recto: nunquam tamen dabitur æqualis.

Corollarium secundum.

¶ Sequitur etiam ex huiusce propositionis demonstratione, quòd trianguli angulus qui reliquis duobus æquatur, rectus est. ¶ Et quando utrobique cõsistẽtes anguli, eisdem angulis fuerint æquales: uterque æqualiũ angulorũ rectus erit.

Θεώρημα κη, Πρόθεσις λβ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

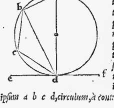
Theorema 28, Propositio 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem extendatur quædam recta linea circulum dispescens: anguli quos efficit ad tangentem, æquales sunt eis qui alterni in circuli segmentis consistunt, angulis.

Quando dispescẽs, orthogonalis est ad tangentem.

ORONTIVS *¶ Esto enim circulus a b c d, quem tangat recta linea e f, in puncto d: à contactu autem d, extendatur recta quædam linea d b, dispescens datum circulum a b c d. Aio quòd angulus b d e, æqualis est angulo qui in segmento b a d: & angulus b d f, ei qui in segmento b c d, itidem æqualis. In primis enim, aut b d, recta super rectam e f, ad rectos incidet angulos, aut non. Si ad rectos inciderit angulos: ea transibit per centrum, efficieturque dimetiens ipsius a b c d, circuli, per decimamnonam huius tertij. Qui autem in utroque semicirculo consistet angulus, rectus erit, per antecedentem trigesimamprimam ipsius tertij. hinc per quartum postulatum, uterque rectus qui circa d, utrique recto in alternis semicirculis constituto erit æqualis. ¶ Sed esto b d, minimè perpẽdicularis super e f: & per undecimam primi, à dato puncto d, datæ rectæ lineæ e f, perpendicularis excitetur a d. Sumatur præterea in b d, circunferentia pũctum aliquod, sitque illud c: & per primum postulatum, cõnectantur rectæ a b, b c, atque c d. Cùm igitur ex hypothesi, recta linea e f, tangat ipsum a b c d, circulum, à contactu autem d, ipsi tangẽti e f, ad rectos angulos*

Quando extensa, nõ est orthogonalis cum tangẽte circulum.



gulos excitata eſt a d: tranſit igitur a d, recta per centrum, ſitque dimetiẽs ipſius a b c d, circuli, per decimamnonam huius tertij. Trianguli igitur a b d, angulus qui ad b, in ipſo exiſtens ſemicirculo, per antecedentem trigeſimam primam huius tertij, rectus eſt: reliqui itaque anguli a d b, & b a d, uni recto, per trigeſimamſecundam primi, ſunt æquales. Angulus porrò a d e, rectus eſt: qui igitur ſub a d b, & b a d, continentur anguli, ipſi angulo a d e, ſunt æquales. utriq; autem æqualium, communis eſt a d b: reliquus igitur b d e, reliquo b a d, (qui alternus in b a d, ſegmento conſiſtit) angulo, per tertiam communem ſententiam eſt æqualis. Rurſum quoniam anguli b d e, & b d f, duobus rectis, per decimamtertiam primi, ſunt æquales: eiſdẽ quoque duobus rectis, æquales ſunt qui in a b c d, quadrilatero, ex oppoſito cõſiſtunt anguli b a d, & b c d, per uigeſimamſecundam huius tertij. Et anguli igitur b a d, & b c d, ipſis angulis b d e, & b d f, ſunt per primam communem ſententiam æquales: quorum alter, ut pote b a d, alteri b d e, æqualis præoſtenſus eſt. Reliquus igitur angulus b d f, reliquo & alterno b c d, per tertiam communem ſententiam coæquatur. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, &c. ut in theoremate. Quod receperamus oſtendendum.

Partium figuræ præparatio.

Πρόβλημα ε, Πρόθεσις λγ.

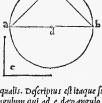
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Problema 5 Propoſitio 33.

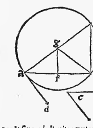
33

SVper data recta linea, deſcribere ſectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

ORONTIVS. ¶ Sit data recta linea a b, datus porrò angulus rectilineus qui ad c, ſitque receptum deſcribere ſuper a b, circuli ſectionem, quæ capiat angulum ipſi dato angulo c, æqualem. Datus itaque angulus, aut erit rectus, aut acutus, uel obtuſus. Eſto primùm rectus, ut in prima figura. Secetur ergo ipſa a b, recta linea bifariam, per decimam primi, in puncto d: & centro d, interuallo autem d a, uel d b, circulus deſcribatur a e b, per tertium poſtulatum. Sumatur deinde contingens aliquod punctum in alterutro ſemicirculo, ſitque illud e & coniungantur a e, & e b, lineæ rectæ, per primum poſtulatum. Et quoniam ſemicirculus eſt a e b: angulus igitur qui ad e, per trigeſimã primam huius tertij rectus eſt, & ipſi propterea angulo c, per quartum poſtulatũ æqualis. Deſcriptus eſt itaque ſuper a b, recta, ſemicirculus a e b, ſuſcipiens angulum qui ad e, dato angulo c, æqualẽ. Sit autẽ ipſe datus angulus c, acutus, uelut in ſecũda figuræ deſcriptione. Ad datã itaque rectam lineã a b, datũque in ea punctũ a, dato angulo rectilineo c, æqualis angulus rectilineus cõ



ſtituatur b a d, per uigeſimãtertiam primi. Erit igitur angulus b a d, acutus: & proinde a b, ſuper ipſam a d, non eſt perpendicularis. Excitetur ergo per undecimam primi, à dato puncto a, datæ rectæ lineæ a d, perpendicularis a e: diuidatúrque ipſa a b, recta bifariã in puncto f, per decimã ipſius primi: & per undecimam eiuſdem primi, à dato puncto f, ipſi a b, rectæ lineæ ad angulos rectos excitetur f g. Conuenient itaque a e, & f g, per quintum poſtulatum: interiores enim & in eadem parte anguli a f g, & g a f, binis rectis ſunt minores. conueniant igitur ad punctum g: & connectatur b g, recta, per primum poſtulatum. Cũ igitur a f, ipſi f b ſit æqualis, & utriq; communis f g: duæ igitur a f, & f g, trianguli a f g, duabus g f, & f b, trianguli g f b, ſunt æquales altera alteri: & æquos inuicem capiunt angulos, nẽpe rectos, qui circa f. Baſis igitur a g, baſi g b, per quartam primi eſt æqualis. Centro itaque g, interuallo autẽ g a, uel g b, circulus deſcribatur a e b, per tertiũ poſtulatum. tranſibit ergo circulus a e b,



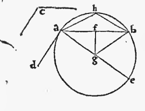
per ipſius a b, limites. Extenſa igitur a e recta, per ſecũdum poſtulatum, in circunferentiã ipſius circuli: connectatur recta b e, per primum poſtulatum. Et quoniam a d recta, ab a puncto ipſius a e dimetiẽtis extremitate, ad rectos eſt angulos: tangit igitur a d, ipſum a e b circulum, per corollarium decimæſextæ huius tertij. Rurſum, quoniã recta quædã linea a d, tangit ipſum a e b circulũ, à contactu autem extenſa eſt recta quædam linea a d, circulum diſpeſcẽs: angulus igitur qui ad e, conſiſtens in alterno ſegmento a e b, angulo b a d, quem facit extenſa a b, cum extenſa a d, per trigeſimãſecundam huius tertij eſt æqualis. Eidem porrò b a d, æquus eſt angulus c, per conſtructionem. Angulus igitur qui ad e, dato angulo c, per primam communem ſententiam eſt æqualis. Super data itaque recta linea a b, deſcriptum eſt circuli ſegmentum a e b, ſuſcipiens angulũ qui ad e, dato angulo c æqualẽ. ¶ Q uòd ſi datus angulus c, fuerit obtuſus: haud diſsimili uia, propoſitionis intentum perficietur. Dato enim rurſum angulo b a d, ipſi angulo c æquali, per uigeſimãtertiam primi, & a b, recta diuiſa bifariam in puncto f, per decimam, excitatáque perpendiculari f g, per undecimam eiuſdem primi: conuenient rurſum a e, & f g, in rectum extenſæ, per quintũ poſtulatũ (anguli enim a f g, & g a f, ſunt minores duobus rectis) cõueniant ergo ad punctũ g. & ſumpto pũcto h, prout in a b circunferentia contigerit: connectãtur a h, h b, & b g lineæ rectæ, per primum poſtulatum. Cùm igitur a f, ſit æqualis f b, & f g, utrſque communis: duo latera a f, & f g, trianguli a f g, duobus lateribus g f, & f b, trianguli g f b, ſunt æqualia alterum alteri: & æquales inuicem continent angulos, utpote rectos qui circa punctum f. Baſis igitur a g, baſi g b, per quartam primi eſt æqualis. Centro itaque g, interuallo autem g a, uel g b, deſcribatur a e b circulus, per tertium poſtulatum. tranſibit ergo circulus ipſe, per limites datæ re-

Resolutio demõſtrationis.

Quando idẽ angulus datus eſt obtuſus.

Resolutio de mõſtrationis priori ſimilis.

ctæ



ctæ lineæ a b. Hinc rurſum, quoniam recta a d, ab extremitate dimetientis a e, ad rectos excitata eſt angulos: tangit igitur a d, ipſum a e b circulum, per corollarium decimæſextæ huius tertij. Itē quoniā a d rectā, tāgit a e b circulū, à cōtactu autē extēſa eſt a b rectā, circulū diſpēcēs: angulus igitur qui ad b, conſiſtens in alterno circuli ſegmēto a h b, angulo b a d, ſub contingente d a, & extenſa a b comprehenſo, per trigeſimamſecundam huius tertij eſt æqualis. Eidem quoque angulo b a d, æquus eſt per conſtructionem angulus qui ad c. Qui igitur ad c, & b, puncta conſiſtunt anguli, per primam communem ſententiam, ſunt inuicem æquales. Itaque ſuper data recta linea a b, deſcribitur ſectio circuli a h b, capiens angulum qui ad b, æqualem dato angulo rectilineo qui ad c. Quod facere oportebat.

Πρόβλημα ς, Πρότασις λδ.

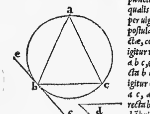
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου, τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Problema 6, Propoſitio 34.

34 Dato circulo, ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

ORONTIVS. *Sit datus circulus a b c: à quo oporteat ſegmētum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo qui ad d. A dato igitur pūcto e, ducatur recta linea e f, contingēs ipſum a b c circulū in pūcto b, per decimāſeptimam huius tertij: & ad datā rectam lineā b f, datumq; in ea pūctū b, dato angulo rectilineo qui ad d, æqualis angulus rectilineus cōſtituatur c b f, per uigeſimātertiam primi: & per primum poſtulatū, coniungātur a b, & a c, lineæ rectæ, comprehēdentes angulū qui ad a. Cùm igitur recta quædā linea b f, tāgat circulum a b c, & à contactu b, alia quædā linea recta b c extēſa eſt, circulū diſpēcēs: angulus igitur qui ad a, exiſtēs in alterno ſegmēto b a c, æquus eſt ipſi angulo c b f, quē efficit recta b c cū tangēte b f, per trigeſimamſecūdā huius tertij. Eidē porrò c b f, angulo, æquus eſt per conſtructionem angulus d. Eſt igitur ſub b a c, contentus angulus, æqualis ipſi angulo d, per primā communē ſententiā. A dato itaque circulo a b c, ſegmētum abſcinditur b a c, capiens angulum qui ad a, æqualem dato angulo rectilineo d. Quod oportuit fecíſſe.*

Conſtructio figuræ.



Demōſtratio problematis.

Θεώρημα κθ, Πρόθεσις λε.

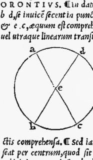
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Theorema 29, Propoſitio 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe adinuicem ſecuerint: rectã gulum comprehenſum ſub ſectionibus vnius, æquum eſt ei quod ſub ſegmentis alterius comprehẽditur rectãgulo. 3

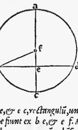
ORONTIVS. ¶ In dato enim circulo a b c d, binæ rectæ lineæ a c, & b d, ſe inuicẽ ſecent in puncto e. Aio quòd rectangulũ comprehenſum ſub a e, & e c, æquum eſt comprehenſo ſub b e, & e d, rectangulo. In primis itaque uel utraque linearum tranſit per centrum circuli, uel una tantùm, aut neutra.

Prima linearum ſeſe inuicem ſecautiũ diſpoſitio.



Tranſeat primũ utraque per centrum e, ut in prima figura. Erunt igitur, per decimam quintam diffinitionẽ primi, a e, e c, b e, & e d, inuicem æquales: nempe eiuſdem circuli ſemidiametri. Quod igitur ſub a e, in e c, fit rectangulũ, æquũ eſt ei, quod ſub b e, & e d, continetur rectangulo, per corollarium quadrageſimæſextæ primi libri: ſunt enim ambo rectangula quadrata, & ſub æqualibus rectis comprehenſa. ¶ Sed iam altera tantummodo linearum, utpote a c, tranſeat per centrum, quod ſit f: ſecétque reliquam b d, in eodem puncto e. Secabit igitur a c, ipſam b d, in duo æqualia, uel in duo non æqualia. Secet primùm bifariam: & ad rectos igitur eam ſecabit angulos, per tertiam huius tertij. Connectatur ergo recta b f, per primum poſtulatum. Rectangulum erit itaque triangulum b e f. Et quoniam recta a c. ſecatur in æqualia in puncto f, & in non æqualia in puncto e: quod igitur ſub a e, & e c, continetur rectangulũ, unà cũ quadrato quod ex e f, æquũ eſt ei, per quintã ſecundi, quod ab f c, fit quadrato Ei porrò quod ab f c. fit quadrato, æquũ eſt id quod ex b f, per corollariũ quadrageſimæſextæ primi: æqualis ſiquidẽ eſt b f, ipſi f c. Cõprehẽſũ igitur ſub a e, & e c, rectangulũ, unà cũ quadrato quod ex e f: æquũ eſt quadrato quod fit ex b f. Quadrato autẽ quod fit ex b f, æqualia ſunt per quadrageſimãſeptimã primi, quæ ex b e, & e f, deſcribuntur quadrata. Cõprehenſum itaque

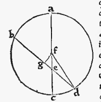
Secunda linearum ſupradictarum diſpoſitio.



ſub a e, & e c, rectangulũ, unà cũ quadrato quod fit ex e f: æquũ eſt quadratis quæ fiunt ex b e, & e f. Ablato igitur cõmuni quadrato quod ex e f: reliquũ ſub a e, & e c, cõprehẽſum rectangulũ, æquũ erit, per tertiã cõmunem ſententiam, reliquo quod ex b e, deſcribitur quadrato. Quod autẽ ex b e, fit quadratum,

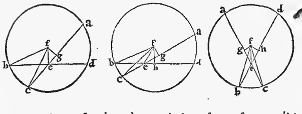
tum, idem est quod sub b e, & e d, cōprehensum rectangulū: est enim per hypothesin b e, ipsi e d, æqualis. Cōprehensum igitur sub a e, & e c, rectangulū, æquū est rectangulo, quod sub b e, & e d, cōtinetur. ¶ *Quòd si a c, per f, centrū educta, ipsam b d, nō ductā per cētrum secuerit inæqualiter, & ad angulos impares: inde non minus facile concludetur. Diuidatur enim b d, recta, bifariam in puncto g, per decimā primi: & connectatur f g, atque f d, per primum postulatum. Cùm igitur f g, per cētrum educta, ipsam b d, non ductā per cētrum bifariā diuidat: & ad rectos quoque eā dispescet angulos, per tertiā huius tertij. Rectus erit igitur uterq; angulorum qui circa g: & proinde triāgula f g d, & f g e, rectāgula. Et quoniā recta a c, bifariā secatur in puncto f, & in non æqualia in puncto e. quod igitur sub a e, & e c, continetur rectāgulum, unà cum quadrato, quod ex e f, æquum est ei quod ex f c, describitur quadrato, per quintā secundi. Quadrato autē quod ex f c, æquum est id quod fit ex f d: æqualis siquidē est f c, ipsi f d, per decimā quintā ipsius primi diffinitionē. Quadrato rursum quod ex e f, æqualia sunt descripta ex f g, & g e, quadrata, per quadragesimā septimam eiusdē primi. Comprehēsum igitur sub a e, & e c, rectangulū, unà cum descriptis ex f g, & g e, quadratis: æquum est quadrato quod fit ex f d. Quadrato insuper quod fit ex f d, æqualia sunt quæ ex f g, & g d, fiunt quadrata, per eādem quadragesimam septimam primi. Quod igitur sub a e, & e c, continetur rectāgulum, unà cum quadratis quæ ex f g, & g e, æquū est eis, quæ ex f g, & g d, fiūt quadratis. Subducto igitur quod ex f g, utrisq; cōmuni: reliquum sub a e, & e c, cōprehensum rectāgulum, una cū quadrato quod ex g e, æquum est ei quod ex g d, fit quadrato. Eidē rursum quod ex g d, fit quadrato, æquum est comprehēsum sub b e, & e d, rectangulum, unà cum eo quod ex eadē g e, fit quadrato, per eādem quintam secundi: diuiditur enim b d, bifariā in puncto g, & in non æqualia in puncto e. Quæ autem eidē æqualia sunt, ea sunt æqualia adinuicē, per primā communem sententiā. Rectāgulum itaque sub a e, & e c, comprehēsum, una cum quadrato quod ex g e: æquum est comprehēsō sub b e, & e d rectāgulo, una cū eodē quadrato quod fit ex g e. Ablato autē cōmuni quadrato quod ex g e: reliquū sub a e, & e c, cōprehensum rectāgulum, reliquo quod sub b e, & e d, continetur rectāgulo, per tertiā communem sententiā est æquale.* ¶ *Neutra demū supradictarum linearum per centrū educatur (ut in sequētibus figuris) siue una secet aliā per æqualia, siue non: sitque rursum ipsius circuli centrum f. Connectatur igitur e f, recta, per primum postulatum: & utraque a c, & b d, bifariam diuidatur, per decimam primi, a c, quidem in g, & b d, in puncto h: & connectantur demum f b, f c, f e, f g, & f h, per primum postulatum. Diuidet ergo f g, ipsam a c, ad rectos angulos: similiter & f h, ipsam b d, per tertiam huius tertij propositionem: eruntque triangula f g e, & e f h, necnon f g c, & f b h, rectangula. Et quoniam a c, bifariam secatur in g, & in non æqualia in puncto e:*

Earundem linearū dispositio tertia.



Quarta prædictarū lineārū dispositio.

cto e:comprehensum igitur sub a e & e c rectangulũ, unà cũ eo quod ex g e fit quadrato, æquũ est per quinãt secũdi quadrato quod fit ex g c. Addatur commune quadratum, quod ex f g describitur: quod igitur sub a e & e c



continetur rectangulum, unà cum quadratis quæ fiunt ex f g, & g e, binis quadratis quæ ex f g, & g c, per tertiam communem sententiam est æquale. Quadratis porrò quæ fiunt ex f g, & g e, æquum est quadratum quod fit ex e f: eis item quæ ex f g, & g c, fiunt quadratis, æquum est id quod ex f c, per quadragesimamseptimam primi. Quod igitur sub a e, & e c, continetur rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex e f, æquum est quadrato quod fit ex f c. Ipsi autem f c, æqualis est f b, per circuli diffinitionẽ: hinc per corollarium quadragesimæsextæ primi descriptum ex f h quadratum, æquũ est ei quod fit ex f c. Comprehensum igitur sub a e, & e c rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex e f: æquum est quadrato quod fit ex f b. Et proinde quod sub b e, & e d, continetur rectangulum, unà cum ipso quadrato quod fit ex e f: æquum est eidem quadrato, quod fit ex f b. Quæ autem eidem æqualia, & adinuicem æqualia sunt, per primam communem sententiam. Comprehensum igitur sub a e, & e c, rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex e f: æquatur rectangulo, quod sub b e, & e d continetur, ac ipsi quadrato quod fit ex e f. Dempto itaque communi quadrato quod fit ex e f: reliquum sub a e, & e c, comprehensum rectangulum, reliquo quod sub b e, & e d, cõtinetur rectangulo, per tertiam cõmunem sententiam est æquale. In prima autem trium antecedentium figurarum, ubi a c bifariam secat ipsam b d, erit f e super eadem b d, perpendicularis: & quadratum quod fit ex f b, ijs quæ ex b e, & e f fiunt quadratis æquale. Hinc facilè concludetur, quadratum quod ex b e, seu rectangulum sub b e, & e d, comprehensum, æquum fore rectangulo quod sub a e & e c continetur. Si igitur in circulo duæ rectæ lineæ se adinuicem secuerint: &c. ut in theoremate. Quod demonstrare oportebat.

Θεώρημα λ, Πρότασις λϛ.

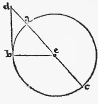
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβα-

λαμβανομένης, μεταξὺ, τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Theorema 30, Propositio 36.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eóque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, & earum altera circulũ diſpeſcat, altera verò tangat: quod ſub tota diſpeſcente, & extrinſecus ſumpta, inter punctum & curuam circunferentiam comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei quod fit ex tangente quadrato.

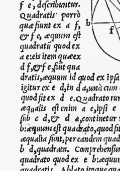
ORONTIVS. ¶*De tangente hic uelim intelligas, quæ inter punctum exteriùs ſumptum, & contactum ipſum intercipitur. Eſto igitur datus ſemicirculus a b c, extra quem ſumatur punctum d: & à puncto d, in ipſum circulum cadant binæ rectæ lineæ d b, & d a c, quarum d b tangat ipſum circulum, d a c uerò eundem circulum diſpeſcat. Aio quòd rectangulum ſub c d, & d a, comprehenſum: æquum eſt quadrato, quod fit ex b d. Aut enim recta linea d a c, tranſit per circuli centrum, uel extra. Tranſeat primò per centrum, ſitque illud e: & connectatur e b, recta, per primũ poſtulatum. Aequalis eſt igitur a e, ipſi e c, per circuli diffinitionem. Diſcinditur itaque a c bifariam, in puncto e: & illi in rectum adiicitur a d. Quod igitur ſub c d, in d a, continetur rectangulum, unà cum eo quod ex a e fit quadrato: æquum eſt, per ſextam ſecundi, quadrato quod fit ex e d. Ei porrò quod ex a e, fit quadrato, æquum eſt quadratum quod ex b e: ſunt enim a e, & b e, per ipſius circuli diffinitionem, inuicem æquales. Comprehenſum igitur ſub c d, & d a, rectangulum, unà cum eo quod ex b e fit quadrato: æquum eſt quadrato, quod ex e d. Quadrato rurſum quod fit ex e d, æqualia ſunt quæ ex d b, & b e, utraque fiunt quadrata, per quadrageſimamſeptimam primi: angulus enim qui ad b, per decimamoctauam huius terij rectus eſt. Quod igitur ſub c d, & d a, continetur rectangulum, unà cum eo, quod ex b e fit quadrato: æquum eſt eis, quæ ex d b, & b e, fiunt quadratis. Subducto itaque communi quadrato, quod ex b e, reliquum quod ſub c d, & d a, continetur rectãgulũ, æquũ eſt per tertiã communem ſententiã reliquo, quod ex tãgente d b fit quadrato. ¶Non extendatur autẽ d a c, recta per centrũ ipſius circuli, quod rurſum ſit e: & diuidatur a c, bifariã in puncto f, per decimã primi: cõnectãtúrq; per primum poſtulatum e a, e b, e d, & e f. Diuidet igitur e f eandem a c orthogonaliter, per tertiã huius tertij: & e b perpendicularis erit ad tãgentem b d, per decimãoctauam eiuſdem tertij. Et quoniam a c bifariam diuiditur in puncto f, cui in rectum adpoſita eſt a d: quod igitur ſub c d, in d a, continetur rectangulum, unà cum eo quod ex a f deſcribitur quadrato: æquum eſt*

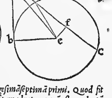


Vbi diſpeſcens circulũ trãſit, per cẽtrum.

Quando circulum diſpeſcens, nõ trãſit per centrũ

per sextam ipsius secundi, quadrato quod fit ex d f. Addatur commune quadratum, quod fit ex f e: comprehensum igitur sub c d, & d a, rectāgulum, unà cū descriptis ex a f, & f e, quadratis, æquum est quadratis, quæ ex d f, & f e, describuntur. Quadratis porrò quæ fiunt ex a f, & f e, æquum est quadratū quod ex a e: eis item quæ ex d f, & f e, fiūt qua





dratis, æquum id quod ex ipsa d e, per quadragesimāseptimā primi. Quod fit igitur ex e d, in d a, unà cum eo quod ex a e, fit quadrato: æquū est quadratū quod fit ex d e. Quadrato rursum quod fit ex a e, æquum est id quod ex e b: æqualis est enim a e, ipsi e b, per ipsam circuli diffinitionem. Quod igitur sub c d, & d a, continetur rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex e b: æquum est quadrato, quod fit ex d e. Ipsi autem quod ex d e, fit quadrato: æqualia sunt, per eandem quadragesimamseptimam primi, descripta ex e b, & b d, quadrata. Comprehensum igitur ex e d, in d a, rectangulum, unà cum quadrato quod ex e b: æquum est eis, quæ ex eadem e b, & ipsa b d, fiunt quadratis. Ablato itaque quadrato quod ex e b, utrique æqualium communi: reliquum ex e d, in d a, comprehensum rectangulum, reliquo quod ex tangente b d, fit quadrato, per tertiam communem sententiam est æquale. Igitur si extra circulum sumatur punctum aliquod, & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum susceperamus.

Corollarium.

Quotlibet igitur rectangula, sub rectis singulis ex eodem puncto extra circulum sumpto deductis, atque circulum ipsum dispescentibus, & extrinsecus sumptis inter punctum & curuam circunferentiam comprehensa, sunt inuicem æqualia: Nam eidem æqualia quadrato, quod ex ipsa tangente describitur.

Θεώρημα λα, Πρότασις λζ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ· ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς, ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Theorema 31, Propositio 37.

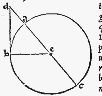
Cōuersa præcedentis.

SI extra circulum sumatur punctū aliquod, & ab eo pūcto in circulū duæ rectæ lineæ ceciderint, & earū altera circulum secet, altera verò cadat: sit autem quod fit sub tota dispescente

37

dispescente & extrinsecus sumpta inter punctum & curuam circunferentiam, æquale ei quod fit ex cadente: cadens circulũ tanget.

ORONTIVS ¶ *Hæc est conuersa præcedentis: & de cadente rursum uenit intelligenda, quæ inter punctum datum extra circulum, & ipsum contactum comprehenditur. Sit igitur rursum extra circulum a b c, susceptum punctum d, à quo in eundem circulum duæ procidant lineæ rectæ, d b quidem in circulum incidens, d a c uerò eundem circulum dispescens: sit autem receptum, ut*

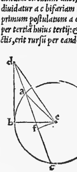


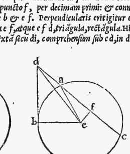
id quod sub c d, in d a comprehenditur rectãgulum, æquum sit ei quod ex cadente d b fit quadrato. Aio quòd d b tangit circulum a b c. In primis enim aut d b circulũ dispescens trãsit per ipsius circuli centrum (quod rursum sit e) uel extra. Detur primum: & connectatur e b recta, per primum postulatum. Cùm igitur a c, bifariam diuidatur in puncto e, & eidem adponatur in directum a d: erit sub c d in d a, cõprehensum rectangulum, unà cum quadrato quod fit ex a e, æquale quadrato quod ex e d, per sextam secundi. Ipsi porrò a e, æqualis est e b, per circuli diffinitionem: & ab æqualibus rectis æqualia describuntur quadrata, per corollarium quadragesimæsextæ primi. Comprehẽso igitur sub c d, in d a, rectangulo, unà cum eo quod ex e b fit quadrato, æquum est quadratum quod fit ex e d. Eidem porrò sub c d, in d a, comprehẽso rectãgulo: æquum est quadratum quod fit ex b d, per hypothesin. Quod igitur ex e d fit quadratum æquum est eis quæ ex d b & b e quadratis describuntur. Rectus est igitur angulus qui ad b, per ultimam primi. hic per corollarium decimæsextæ huius tertij, ipsa d b tangit circulum in puncto b.

Prima figuræ differentia.

¶ *Sed dispescat d a c recta eundem circulum alibi, quàm per centrum: ut in secunda uel tertia figura. & diuidatur a c bifariam in puncto f, per decimam primi: & connectantur per primum postulatum a e, e b & e f. Perpendicularis erit igitur e f, super a c, per tertiã huius tertij: & a e f, atque e f d, triãgula, rectãgula. His ita constructis, erit rursũ per eandẽ sextã secũdi, comprehensum sub c d, in d a, rectãgulũ, unà cũ quadrato quod ex a f, æquale quadrato quod fit ex d f. addatur utrobique quadratum* ꝙ *fit ex f e. Cõprehensũ igitur sub c d & d a rectãgulum, unà cum quadratis*

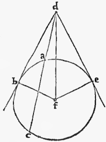
Secunda figuræ differẽtia.





quadratis quæ fiunt ex a f, & f e: æqualia sunt eis, per secundum communem sententiam, quæ ex d f, & f e quadratis describuntur. Eis autem quæ ex a f, & f e quadratis describuntur: æquum est quadratum quod fit ex c a, per penultimam primi: & proinde id quod fit ex e b. Eis rursum quæ ex d f, & f e, quadratis describitur: æquum est per eandem penultimam primi, id quod fit ex e d. Quod igitur sub c d, in d a, continetur rectangulum, unà cum eo quod ex e b, fit quadrato: æquum est quadrato quod fit ex e d. Eidem porrò sub c d, in d a, comprehenso rectangulo, æquum est per hypothesin, quod ex b d, fit quadratum. Quæ igitur ex d b & b e, quadrata describuntur: æqualia sunt ei, quod ex e d, fit quadrato. Et proinde angulus qui ad b, rectus est, per ultimam ipsius primi: & b d, propterea tangit circulum a b c d, per ipsum decimæsextæ huius tertij corollarium. Quod fuerat ostendendum. ¶ Potest & hæc ultima propositio aliter in uniuersum demonstrari, unica tantummodò coassumpta figura, in hunc qui sequitur modum. A dato puncto d, dato circulo a b c, contingens recta linea ducatur, per decimamseptimam huius tertij: sitque illa d e. Ipsius autem circuli centrum esto f: & per primum postulatum connectantur rectæ lineæ f b, f d, & f e. Erit igitur f e, perpendicularis in contingente d e, per decimamoctauam huius tertij: & proinde angulus d e f, rectus. Cùm igitur à puncto d, cadant binæ lineæ rectæ d a c, & d e, quarum altera, utpote d a c, circulum secat, reliqua uerò d e, ipsum tangit circulum: quod igitur ex d e, fit quadratum, æquum est comprehenso sub c d, & d a, rectangulo, per antecedentem trigesimamsextam propositionem. Eidem porrò quod ex c d, in d a, fit rectangulo, æquum est per hypothesin, quod ex d b, fit quadratum. Quæ igitur ex d b, & d e, fiunt quadrata, sunt per primam communem sententiam inuicem æqualia. Et proinde recta d b, æqualis ipsi d e, per corollarij quadragesimæsextæ primi conuersionem. Aequalis rursum est f e, ipsi f b, per sæpius allegatam circuli diffinitionem. Binæ igitur d b, & b f, trianguli d b f, duabus d e, & e f, triãguli d e f, sũt æquales altera alteri: habéntque eãdẽ basin cõmunẽ. Angulus itaque d b f, ipsi angulo d e f, per octauã primi est æqualis. Atqui d e f angulus e, st rectus: & qui sub d b f, igitur continetur angulus, rectus est. Est autem f b, semidiameter circuli, & altera igitur pars diametri, à cuius extremitate b, ad angulos rectos excitatur b d: tangit igitur b d, circulum ipsum a b c, per corollarium decimæsextæ huius tertij. Idẽ quoque deducetur, ubi d a c, recta per centrum ipsius transibit circuli. Si extra circulum igitur sumatur punctum aliquod: &c. ut in ipso theoremate. Quod tandem fuerat ostendendum.

Idem aliter & vniuersaliter magis ostendere.



Tertij Libri Geometricorum Elementorum,

FINIS.

da figura, in qua rursum duo latera a g, & g f, sunt maiora tertio a f, per uigesimam primi: & proinde maiora ipsa f a g b, quæ per circuli diffinitionē ipsi a f, est æqualis. Sublata porrò communi parte g f: relinquetur a g, maior ipsa g d, per tertiam communem sententiam. In circulo itaque a d e, quæ à centro g, in circumferentiam prodeunt lineæ rectæ g a, & g d, non erunt inuicem æquales: contra decimamquintam diffinitionem primi. Cadit igitur f g, eiecta, in contactum a. Ergo si bini orbes se introrsum, &c. ut in theoremate. Quod ostendendum fuerat.

Θεώρημα ια, Πρόθεσις ιβ.

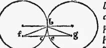
Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Theorema 11, Propositio 12.

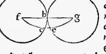
SI duo circuli sese adinuicem exterius tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per cōtactum trāsibit. [12]

Idē qui prius ostendēdi modus ab impossibili.

ORONTIVS. ¶ Tangant se exterius bini circuli a b c, & d b e, in puncto quidem b: sitque ipsius a b c, circuli centrum f, & ipsius d b e: centrum g. Aio quòd connexa f g, recta linea, transibit per contactum b. Si enim non transierit per punctum b, transeat (si possibile sit) per c & e, puncta: & connectantur b f, & b g, rectæ lineæ, per primum postulatum. Et quoniā punctum f, centrū est circuli a b c: æqualis erit f b, ipsi f c, per decimamquintam diffinitionem primi. Rursum quoniam g, centrum est circuli d b e, æqualis erit per eandē decimamquintam primi diffinitionem g b, ipsi g e. Binæ igitur f b, & b g, duabus f c, & e g, per secundā communem sententiam erunt æquales. Tota porrò f g, ipsis f c, & e g, maior est (nempe c e, extra circulos incidente particula.) tota igitur f g, maior est eisdem f b, & b g. In triangulo itaque f b g, bina latera f b, & b g, erūt minora reliquo f g. sunt autem maiora, per uigesimam primi: quæ simul impossibilia sunt. Igitur à centro f, ad centrum g, adplicata recta linea f g, transit per contactum b. Si duo igitur circuli, & quæ sequuntur reliqua. Quod demonstrare oportebat.



¶ In hac igitur, ueluti proxima propositione, aut intellectuali discursu, aut oculari inspectione demonstrationi succurrendum est. Cùm non possit igitur f g. linea recta alibi transire, quàm per contactum b: erunt centra f, g, à suis ueris sedibus (ostensionis gratia) dimouenda, aut producta f c e g, linea, & si obliqua uideatur, recta tamen imaginanda est, & cum duabus f b, & b g (quæ per aduersarium inclinabuntur adinuicē, & non erunt in directū constitutæ) triangulum efficient b f g. Vt ex hac potes elicere figura: quæ te ad pristinum deducet inconueniens.



Θεώρημα ιβ, Πρόθεσις ιγ.

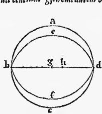
Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐφάπτηται.

Theorema 12, Propositio 13.

13 Circulus circulum non tangit in pluribus punctis vno: & si extra, & si intus tangat.

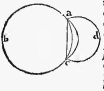
De circulis se introrsum tangentibus.

ORONTIVS. ¶Tangat in primis circulus a b c d, circulum b e d f, introrsum (si fuerit possibile) in punctis b, d, sitque ipsius a b c d, circuli centrum g, circuli autem b e d f, centrum h. Adplicata igitur ex g, in h, recta linea, & eiecta: cadet in puncta contactuum b d, per undecimam huius secundi libri. Et quoniam g, centrum est circuli a b c d: erit g b, ipsi g d, per circuli diffinitionem æqualis. Tollatur g b, ab ipsa g d: eadem ergo g b, reliqua b d, maior erit. Rursum quoniam h, centrum est circuli b e d f: æqualis erit h b, ipsi h d, per eandem circuli diffinitionē. Tollatur rursum g b, ab ipsa h b: reliqua igitur g b, minor erit ipsa b d. Ostensum est autem, quod & multo maior: quod non est possibile. Non tangit igitur circulus a b c d, circulum b e d f, introrsum, in pluribus punctis uno.



¶Secet rursum circulus a b c, circulum a d, exterius in punctis a & c (si id fuerit possibile) & connectatur recta a c, per primum postulatū. Et quoniam in circūferētia circuli a b c, duo sunt accepta pūcta a & c: adplicata igitur recta linea a c, intra ipsū circulū cadet, per secūdam huius tertij: ergo extra circulū a d c. Rursum quoniam eadem a & c, pūcta in circunferētia ipsius a d c, circuli coassumpta sunt (utpote utriq; circulo cōmunia) eadē igitur recta a c, cadet intra circulū a d c, per eandē secūdam huius: & extra igitur circulum a b c. Patuit autē, quòd & intra ipsum a b c, circulū cadit eadem a c, atq; extra ipsum a d c, circulum. Cadet igitur intra & extra utrunque datorum circulorū: quod est impossibile. Non tangit ergo circulus a b c, circulum a d c, exterius in pluribus punctis uno. Patuit quòd nec introrsum. Quod ostendere fuerat operæpretium.

De circulis qui se tangāt extra.



Θεώρημα ιγ, Πρόθεσις ιδ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Theo-

Orontij Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, in quartum elementorum Euclidis, Demonstrationes.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τοῦ ἐγγράφεσθαι καὶ περιγράφεσθαι σχῆμα, ὅροι ζ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται ὅταν, ἑκάστη τῶν ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

De inscriptione ac circunscriptione figurarum diffinitiones septem.

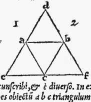
1 Figura rectilinea, in figura rectilinea describi dicitur: quando vnusquisque inscriptæ figuræ angulus, vnūquodque latus eius in qua describitur, tangit.

Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου, ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

Figura autem similiter circa figuram describi dicitur: quando vnumquodque latus circunscriptæ, vnumquenque angulum eius circum quam describitur, tangit.

ORONTIVS. *Huiuscemodi figurarum inscriptiones ac circunscriptiones, de regularibus, hoc est, æqualia latera, & angulos inuicem æquales habentibus (exceptis forsitan triangulis, in quæ cæteræ resoluūtur rectilineæ figuræ) ueniunt potissimum intelligendæ. Inscribuntur præterea, atque inuicem circunscribuntur rectilineæ tantummodò figuræ, quæ eiusdem sunt speciei: utpote, triāgulū triāgulo, quadratū quadrato, pētagonū pētagono, &c. Oportet enim, tot esse latera circunscriptæ, quot ipsius inscriptæ sunt anguli. Quanquam porrò circulus non sit figura rectilinea: propter illius tamē regularitatem, possunt & ipsæ rectilineæ ac æquilateræ figuræ, circulo inscribi ac circunscribi, & è diuerso. In exemplum igitur primæ ac secundæ diffinititionis, habes obiectū a b c triangulum æquilaterum, descriptum in d e f triangulo: uel ipsum d e f triangulum, ipsi a b c triangulo respondenter circunscriptum.*

Quæ figuræ inscribantur & circunscribantur adinuicem.



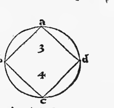
Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκά-

στη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.
Figura rectilinea, in circulo describi dicitur: quando vnusquisque angulus inscriptæ, circuli circunferentiam tangit.

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.
Circulus verò, circa figuuram rectilineā describi dicitur: quādo circuli circunferentia, vnumquenque eius, circum quam describitur, angulum tangit. 4

Cur figura circularis, rectilinæis inscribatur & circunscribatur.

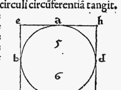
Figura circularis, ob uniformen & regulatam circumferentiæ à cętro distantiam, rectilineas omnes ac regulares figuras, tum intra, tum extra facilè capit: singulos angulos inscriptæ, uel omnia circunscriptæ contingens latera. Quemadmodum in præcedentium tertiæ & quartæ diffinitionum elucidationem, ostendit descriptum in a b e d circulo quadratum: uel idem circulus, quadrato a b c d circūscriptus.



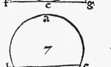
Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς, τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.
Circulus autē, in figura rectilinea describi dicitur: quādo circuli circūferentia, vnūquodque latus eius in qua describitur tāgit. 5

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.
Figura verò rectilinea, circa circulū describi dicitur: quādo vnūquodque latus circūscriptæ, circuli circūferentiā tangit. 6

In exemplum, habes circulum a b c d, in quadrato e f g h descriptum: atque idem quadratum e f g h, descriptum circa eundem circulum a b c d. Idem respondenter uelim intelligas de cæteris quibuscūque regularibus figuris, in circulo uel circa eundem circulum, prius diffinita ratione descriptis.



Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς, ἐπὶ τῆς περιφερείας, ᾖ τοῦ κύκλου.
Recta linea circulo congruere dicitur: quando eius extrema, in circuli circunferentiam cadunt. 7



Quanquā hæc ultima diffinitio, tā de circuli dimetientibus, quàm de cæteris rectis non per centrū eductis (quas uocāt chordas) sit intelligēda: ipsas tamē rectas circuli

dimetiẽte minores potissimũ respicere uidetur, quæ sũt uidelicet latera inscribẽdarũ intra circulũ rectilinearum figurarum. Cuiusmodi uidetur esse recta b c: cuius extrema, siue limites b & c, in dati circuli a b c circunferentiam cadunt.

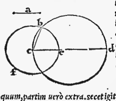
Πρόβλημα α Πρότασις α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Problema I, Propositio I.

1 IN dato circulo, datę rectæ lineæ minimè maiori circuli diametro existenti: æqualem rectam lineam coaptare.

ORONTIVS. *Sit data recta linea, non maior dimetiẽte dati circuli b c d (non intraret enim circulum, si foret maior: quoniam in circulo maximus est dimetiens, per decimamquintam tertij) in quo quidẽ circulo oporteat ipsi datæ rectæ lineæ a, æqualem rectam lineam coaptare. Producatur ergo circuli b c d, dimetiens c d. Erit itaque a recta linea, aut æqualis ipsi dimetienti: aut eo minor. Si æqualis: iam coaptata est recta linea c d, æqualis ipsi datæ rectæ lineæ a. Quòd si recta linea a, fuerit minor dimetiẽte c d: secetur à maiori c d, ipsi a minori æqualis, per tertiam primi: sitque illa c e. Et centro c, interuallo autem c e, describatur circulus b e f, per tertium postulatum. Secabit igitur circulus b e f, datũ b c d circulum: sunt enim in eodem plano, & semidiameter unius pars dimitientis alterius, atque unius circunferentia partim intra reliquum, partim uerò extra. Secet igitur in puncto b: & per primum postulatum, connectatur recta b c. Coaptatur itaque b c recta, in dato b c d circulo: cadũt enim extrema b & c, in ipsius b c d circuli circunferentiam. Aio quòd æqualis est ipsi a. Quoniam punctum c, centrum est circuli b e f: æqualis est igitur b c ipsi c e, per circuli diffinitionem. Eidem porrò c e, æqualis est recta linea a, per constructionem. Duæ igitur, a inquam, & b c, eidem c e, sunt æquales: & proinde æquales adinuicẽ per primã cõmunẽ sententiã. Datæ igitur rectæ lineæ a, æqualis recta linea b c, in dato circulo b c d coaptatur. Quod oportebat facere.*



Πρόβλημα β, Πρότασις β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Problema 2, Propositio 2.

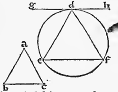
2 IN dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

ORONTIVS. *Esto datum triangulum a b c, cui oporteat describere æquiangulum triangulum, in dato circulo d e f. A dato igitur puncto g, dato circulo d e f, contingens recta linea ducatur g d h, tangens ipsum circulum d e f,* in

Constructio figuræ

in puncto d, per decimamseptimam tertij. Et ad datam rectā lineam d h, datúmque in ea punctum d, dato angulo rectilineo qui ad b, æqualis angulus rectilineus constituatur f d h, per uigesimamtertiam primi: & per eandem, angulo qui ad c, æqualis angulus constituatur ad idem punctum d, datæ rectæ lineæ g d, sitque g d e. ipsis d e, & d f, circulo d e f coaptatis: connectatur demum e f, recta, per primum postulatum. Et quoniam circulum d e f, tangit quædam recta linea f d h, à contactu autem d, recta quædā linea d f, extenditur, circulum dispescens: angulus igitur qui ad e, in alterno segmento d e f, angulo f d h, per trigesimam secundam tertij est æqualis. Eidem porrò angulo f d h, datus est æqualis angulus qui ad b: per primam igitur communem sententiam, angulus qui ad b, æquus est angulo qui ad e. Et proinde angulus qui ad f, ipsi angulo qui ad c, æqualis. Reliquus igitur angulus qui ad a, reliquo qui ad d, per trigesimamsecūdam primi est æqualis. Aequiangulum est itaque triangulum d e f, ipsi a b c, triangulo, describitúrque in dato circulo d e f. In dato igitur circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum describitur. Quod fecisse oportuit.

Ostēsio problematis.



Πρόβλημα γ, Πρόθεσις γ.

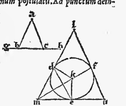
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον περιγράψαι.

Problema 3, Propositio 3.

Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

ORONTIVS. ¶ *Sit datum triangulum a b c, datus uerò circulus d e f, circa quem expediat describere triangulum æquiangulum ipsi a b c, triangulo dato. Producatur itaque in directum ex utraque parte latus b c, in g, & h, puncta, per secundum postulatum: sitque per primam tertij, ipsius circuli a b c, centrum k, & connectatur d k, semidiameter, per primum postulatū. Ad punctum deinde k, datæ rectæ lineæ d k, ipsi angulo a b g, æqualis angulus constituatur d k e, per uigesimamtertiam primi: & per eandem, ad idem punctum k, datæ rectæ lineæ e k, angulus cōstituatur e k f, ipsi angulo a c h æqualis. A punctis autem d, e, f, ad rectos utrinque excitentur angulos d l, d m, e m, e n, f n, & f l, per undecimam primi: quæ per decimamquartam eiusdem primi, in directum constituentur, atque per corollarium decimæsextætertij, tangent ipsum circulum in punctis d, e, f, conueniéntque ad puncta l, m, n. Connexa enim*

3



enim d e, per primum postulatum, diuidet utrunque angulum rectũ qui ad d, & qui ad e: efficiétque propterea ad easdem partes uersus m, interiores angulos m d e, & d e m, binis rectis minores. quare per quintum postulatum, conuenient d m, & e m, in punctum m. Et proinde e n, & f n, in punctum n: atque d l, & f l, ad punctum l. Triangulum erit igitur l m n: & circa datum circulum d e f, per sextam diffinitionem huius descriptum. Dico quòd & ab c, triangulo, est æquiangulum. Quadrilaterum enim d m e k, connexam k, in bina triangula diuidetur: & cuiuslibet trianguli tres anguli, binis rectis, per trigesimã secundam primi, sunt æquales. Et quatuor igitur anguli ipsius quadrilateri d m e k, sunt æquales quatuor rectis. quorum qui ad d, & e, recti sunt per constructionem: reliqui igitur qui ad m, & k, puncta consistunt anguli, duobus rectis coæquantur. Eisdem quoque duobus rectis, æquales sunt per decimamtertiam primi, a b g, & a b c, anguli. Aequales igitur sunt anguli qui ad m, & k, puncta, hoc est d m e, & d k e, ipsis angulis a b g, & a b c, per primam communem sententiam. Angulus porrò a b g, angulo d k e, per constructionem est æqualis: reliquus igitur d m e, seu qui ad m, angulus, reliquo qui sub a b c, per tertiam communem sententiam est æqualis. Haud dissimiliter ostendemus angulum qui ad n, æqualem esse angulo a c b: atque reliquum angulum qui ad l, reliquo qui sub b a c, tandẽ coæquari. Aequiangulum est igitur l m n, triangulum, ipsi dato triangulo a b c: describitúrque circa datum circulum d e f. Circa datum itaque circulum, dato triangulo, æquiangulum descriptum est triangulum. Quod faciendum fuerat.

Quòd l, m, n, sit triãgulũ, & ipsi a, b, c, æquiangulum.

Πρόβλημα δ, Πρότασις. δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

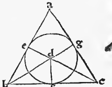
Problema 4, Propositio 4.

IN dato triangulo, circulum describere.

ORONTIVS. Esto datum triangulum a b c, in quo oporteat circulum describere. Secentur ergo bifariam, per nonam primi, qui sub a b c, & a c b, conuentur anguli: rectis quidem lineis d b, & d c, in punctum d, per quintum postulatum, tandem conuenientibus. Et ab ipso puncto d, in rectas a b, b c, & c a, perpendiculares deducantur d e, d f, & d g, per duodecimam primi. quæ quidem perpendiculares, cadent necessariò intra datum triangulum: tametsi laterales eiusdem trianguli lineæ non sint infinitæ, ut eadem præsupponit duodecima (Aliàs enim productis in infinitum eiusdem trianguli lateribus, usque ad casum perpendicularium: triangula constituerentur, quorum exterior angulus non esset maior interiore & ex opposito, contra decimamsextã ipsius primi) His ita præparatis, aio primũ, d e, d f, & d g, fore inuicẽ æquales, Triangula enim b e d, & d f b, habent duos angulos duobus angulis æquales utpote, e b d, ipsi d b f, per constructionem, & rectum qui ad e, recto qui ad f, per quartum postulatum. habent insuper unum latus, uni lateri æquale: com-

mune

mune scilicet b d, quod sub uno æqualium subtenditur angulorum. Reliqua itaque latera, reliquis lateribus habebunt æqualia alterum alteri, per uigesimamsextam primi. Aequalis est igitur de, ipsi d f: & proinde d g, ipsi d f itidem æqualis. Hinc per primam communem sententiam, d e, atque d g, inuicem æquales erunt. Tres igitur d e, d f, atque d g, æquales sunt adinuicem. Centro igitur d, interuallo autem d e, aut d f, aut d g, circulus describatur e f g, per tertium postulatū. Transibit ergo circulus ipse, per eadem puncta e, f, g: tangentque propterea eundem circulum e f g, ipsa a b, b c, & c a, dati a b c trianguli latera, per decimæsextæ tertij corollarium: excitantur enim ad rectos angulos, ab ipsorum dimetientiū d e, d f, & d g, extremitatibus. Circulus autem in figura rectilinea describi dicitur: quando circuli circumferentia, unūquódque latus eius in qua describitur tangit, per quintam huius quarti diffinitionem. In dato itaque triangulo a b c, circulus describitur e f g. Quod oportuit fecisse.



Πρόβλημα ε, Πρότασις ε.

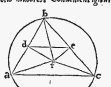
Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

Problema 5, Propositio 5.

Circa datum triangulum, circulum describere.

ORONTIVS. ¶ *Sit triangulum a b c: circa quod receptum sit describere circulum. Secentur itaque bifariam, per decimam primi, a b, & b c, ipsius dati trianguli latera: in punctis quidem d, & e. Ab ipsis deinde punctis d, & e, ad rectos excitentur angulos d f & e f, per undecimam ipsius primi. Aio primùm, rectas d f, & e f, in directum productas, tandem conuenire. Connexa enim recta d e, per primum postulatum: ea diuidet utrunque rectum angulum b d f, & b e f. Et proinde in rectas d f, & e f, recta incidens d e: efficiet ad easdem partes interiores angulos, duobus rectis minores. Conuenient igitur ipsæ d f, & e f, per quintum postulatum: conueniant itaque, ad punctum f. Aut igitur f, punctum cadet intra triangulum a b c, aut super latus a c, uel extra ipsum a b c, triangulū. Cadat primùm intra triangulum, uelutì in prima figuræ dispositione: & connectantur, per primum postulatū, f a, f b, & f c, lineæ rectæ. Cùm igitur a d, sit æqualis ipsi d b, & utrique communis d f: erunt duo latera a d, & d f, trianguli a d f, duobus lateribus f d, & d b, trianguli f d b, æqualia alterum alteri: & æquos inuicem cōtinent angulos, per quartum postulatū: nempe rectos, qui circa d. Basis igitur a f, basi f b, per quartam primi est æqualis. Haud dissimiliter ostēdetur, quòd f c, eidem f b, æqualis est: & proinde f a, æqualis ipsi f c, per primam communem sententiam. Tres*

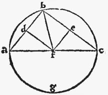
Generalis figuræ præparatio.



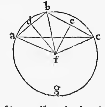
Prima figuræ differentia.

igitur

igitur f a, f b, & f c, sunt inuicem æquales. Centro itaque f, interuallo autem f a, uel f b, aut f c: circulus describatur a b c g, per tertium postulatum. Transibit igitur d: scriptus ipse circulus, per pũcta a, b, c, ad quæ dati trianguli a b c, continentur anguli: tangétque propterea ipsius circuli circunferentia, unumquemque angulum dati a b c trianguli. Ergo per quartam huius quarti diffinitionem, circa datum triangulum a b c, circulus describitur. ¶ Concurrant autem ipsæ rectæ lineæ d f, & e f, super latus a c, ut in secunda figura: & connectatur f b, per primum postulatum. Haud dissimiliter ostendemus, quòd f a, ipsi f b, est æqualis: necnon & f c, eidem f b, per eandẽ quartam primi. Hinc rursum, iuxta præmissam demonstrationem, colligemus tres rectas lineas f a, f b, & f c, fore inuicem æquales. Quapropter si centro f, interuallo autem f a, uel f b, aut f c, circulus per tertium describatur postulatum: is per puncta a, b, c, transire cogetur. Ipsius itaque circuli circunferentia, tanget unumquenque angulum ipsius a b c, trianguli: describetúrque propterea circulus ipse, circa datum triangulum a b c per eandem quartam huius quarti libri diffinitionem. ¶ Sed conueniant demum ipsæ d f, & e f, perpendiculares, extra datum a b c triangulum, ut habet ultima descriptionis formula: & connectantur rursum f a, f b, & f c lineæ rectæ per primum postulatum. Simili prorsus concludemus ostensione, tres rectas lineas f a, f b, & f c, fore rursum inuicem æquales. habent enim triangula a d f, & f d b, duo latera a d, & d f, duobus lateribus f d, & d b, æqualia alterum alteri: & æquos angulos, utpote rectos qui circa d, continẽtur. Vnde per quartam ipsius primi, basis a f, basi f b, concludetur æqualis: et proinde f c, æqualis eidem f b. Hinc per primam communem sententiam f a, ipsi f c æquabitur: tres quoque f a, f b, & f c, tandem cõuincentur æquales. Quapropter descripto, per tertium postulatum pro centro f, ad ipsius f a, uel f b, aut f c interuallum circulo: transibit ipsius circuli circunferẽtia, per eadẽ puncta a, b, c, ad quæ dati trianguli a b c conueniũt latera. Hinc per quartam huius quarti diffinitionem, descriptus erit idẽ circulus, circa datum a b c triãgulũ. Quod faciendũ susceperamus.



Secunda figuræ differẽtia.



Tertiæ figuræ dispositio.

¶ Corollarium.

¶ Ex his, & trigesimaprima tertij fit manifestũ, quòd dũ f, centrum circuli cadit intra datũ a b c triangulũ: angulus qui ad b, recto minor est, utpote in segmẽto semicirculo maiori consistẽs. Dũ autẽ cadit in latus b c: angulus ipse qui ad b, in semicirculo est, & proinde rectus. Quãdo uerò centrũ ipsũ cadit extra datũ triangulũ: idem angulus qui ad b, recto maior fit, utpote in segmento semicirculo minori cõstitutus. Hinc uersauice sequitur, quòd dum angulus qui ad b, est acutus, circunscribendi circuli centrum cadit intra datum triangulum: si autem rectus extiterit,

rit, cadit in medium subtensi lateris: quòd si idem angulus fuerit obtusus, cadit cẽtrum extra ipsum triangulum datum.

Πρόβλημα ϛ Πρόθεσις ϛ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

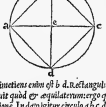
Problema 6, Propoutio 6.

IN dato circulo, quadratum describere.

6

ORONTIUS. ¶Esto datus circulus a b c d, cuius centrum e: in quo quidẽ circulo, oporteat describere quadratum. Coaptentur igitur ipsi a b c d circulo, dimetientes a c, & b d, ad rectos angulos sese inuicem dirimentes: & coniũgantur a b, b c, c d, & d a lineæ rectæ, per primum postulatum. Quadrilaterum erit igitur a b c d: & intra datum circulum, per tertiam huius quarti diffinitionem descriptum: unusquisque enim angulus inscripti quadrilateri, circuli circunferentiam tangit. Aio ipsum a b c d quadrilaterum, fore quadratum. Nam e a, e b, e c, & e d, lineæ rectæ, sunt per circuli diffinitionẽ inuicẽ æquales: ex centro enĩ in circũferentiã. Binæ igitur a e, & e b, triãguli a e b, duabus b e, & e c, trianguli b e c, coæquantur: & æquos inuicẽ cõtinẽt angulos, nempe rectos qui ad centrum e. Basis igitur a b, basi b c, per quartam primi est æqualis. Et proinde a d, & d c, tum inuicem, tum utrique ipsarum a b, & b c, ostẽdẽtur æquales. Aequilaterum est itaque a b c d, quadrilaterũ. Insuper, quoniam a c, dimetiens est ipsius dati circuli: uterque propterea angulorum qui ad b, & qui ad d, est in semicirculo, & proinde rectus, per trigesimamprimam tertij. Et per eandem, qui ad a, & c, sunt anguli, itidem recti: dimetiens enim est b d. Rectangulum est igitur ipsum a b c d quadrilaterum. Patuit quòd & æquilaterum: ergo quadratum, per trigesimam ipsius primi diffinitionẽ. In dato igitur circulo a b c d, quadratũ describitur. Quod facere oportebat.

Postrema demonstrationis pars.



Πρόβλημα ζ, Πρόθεσις ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

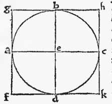
Problema 7, Propositio 7.

CIrca datum circulum, quadratum describere.

7

ORONTIUS. ¶Sit datus circulus a b c d: circa quem receptum sit quadratum describere. Coextendantur ergo ipsius dati circuli dimetientes a c & b d, in centro e ad rectos sese dirimẽtes angulos. Et per ipsorũ dimetientium extrema pũcta a, b, c, d, parallelæ ducantur, per trigesimamprimam primi: f g quidem & h k ipsi b d, f k autem & g h ipsi a c, ad puncta tandẽ f, g, h, k, inuicẽ concurrentes: conuenient enim per quintũ postulatũ, si intelligantur rectæ lineæ a b, b c, b c, c d, & d a, interiores & ad easdẽ partes ãgulos binis rectis minores efficiẽtes. Quæ autẽ eidẽ rectæ lineæ parallelæ: & ad inuicẽ, per trigesimã ipsius primi, sunt parallelæ. Parallela est igitur f g, ipsi h k & f k ipsi g h: et ꝓinde quadrilaterũ f g h k parallelogrãmũ, atq; singula in eodẽ f g h k cõprehẽsa quadrilatera, itidem parallelogramma. Dico ipsum f g h k parallelogrammum,

fore



fore quadratum: descriptúmque circa datum a b c d circulum. Parallelogrammorum enim locorum latera quæ ex opposito, æqualia sunt adinuicem, per trigesimamquartam primi. æqualis est igitur f g, ipsi h k, & f k, ipsi g h: necnon utraque f g & h k, ipsi b d: utraque rursum f k & g h, ipsi a c, æqualis. Porrò a c, & b d, æquales sunt adinuicem: nempe eiusdem circuli dimetientes. Quæ autem æqualibus æqualia sunt: ea quoque sunt inuicem æqualia, per primam communem sententiam. Quatuor igitur f g, g h, h k, & k f, sunt adinuicem æquales: & proinde f g h k parallelogrammum æquilaterum. Parallelogrammorum rursum a b, b c, c, d, & d a, qui ex opposito sunt anguli, æquales sunt adinuicem, per eandem trigesimamquartam primi: æquales sunt igitur singuli qui ad pũcta f, g, h, k, sunt auguli, singulis qui ad e centrum ex opposito consistunt angulis. Anguli porrò qui circa e, per constructionem recti sunt: & recti igitur sunt, qui ad puncta f, g, h, k, continentur. Rectangulum est itaque f g h k parallelogrammum. Patuit quòd & æquilaterum: est igitur quadratum, per trigesimam ipsius primi diffinitionem. Aio demum quòd & circa datum circulum a b c d describitur. In parallelas enim f g, & b d, recta incidens a e, facit alternos angulos a e b, & e a f: similiter & a e d, atque e a g, uicẽ æquales, per uigesimãnonã primi. Atqui recti sũt qui sub a e d, et a e b per constructionem: & uterque igitur qui circa a, rectus est. Haud aliter ostendemus, quòd & reliqui circa puncta b, c, d, consistentes anguli, recti sunt. Quæ autem à circuli dimetientiũ extremitatibus, ad rectos ducuntur angulos: ipsum circulum tangunt, per decimæsextæ tertij corollarium. Tangit igitur unũquodque latus ipsius quadrati f g h k, circumferentiam dati a b c d circuli. Igitur per sextam huius quarti diffinitionem, circa datum circulum a b c d, quadratum describitur f g h k. Quod faciendum receperamus.

Quòd descriptum parallelogrammum sit quadratũ.

Quòd ipsum quadratum, circulo circũscribatur.

Πρόβλημα η, Πρόθεσις η.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

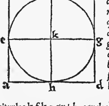
Problema 8, Propositio 8.

8 IN dato quadrato, circulum describere.

ORONTIVS. In quadrato enim a b c d, circulum describere sit operæpretium. Secetur itaque bifariam utrunq; latus a b, & b c, in punctis quidem e, & f: per decimam primi. æquales erunt igitur a e, e b, b f, & f c adinuicem, per septimam communem sententiam: nempe æqualium laterum a b, & b c dimidiæ. Rursum per trigesimamprimam eiusdem primi, per punctum e, ipsis a d, et b c, parallela ducatur e g: per f autem punctum, ipsis a b et c d, parallela f h, secans eandem e g, in puncto k. Parallelogramma sunt igitur a f, f d, d e, et e c: necnon e f, f g, g b, et h e. Parallelogrammorum autem locorum latera quæ ex opposito, et anguli, æqualia sunt adinuicem: per trigesimamquartam ipsius primi. Parallelogrammi

Centri inscribendi circuli inuestigatio.

logrammi igitur d e, angulus qui ad e, æqualis est opposito qui ad d: ipsius item e c parallelogrammi, angulus qui ad e, opposito qui ad c, itidem æqualis. Qui autem ad c, et d, consistunt anguli, recti sunt, per quadrati diffinitionem. Rectus est igitur uterque angulus, qui circa punctum e. Haud dissimiliter ostendetur, quod uterque angulus, qui circa f, aut g, uel h punctum, rectus est. Aequalis insuper est k h, ipsi a e, et k f, ipsi e b: item k e, ipsi b f, et k g, denum ipsi f c. Atqui a e, e b, b f, et f c, sunt æquales adinuicem: quæ autem æqualibus sunt æqualia, et adinuicem æqualia sunt, per primam communem sententiam. Quatuor igitur k e, k f, k g, & k h, æquales sunt adinuicem. Centro ergo k, interuallo autē k e, uel k f, aut k g, seu k h, circulus per tertium describatur postulatum e f g h. Transibit igitur ipsius circuli circunferentia, per eadem puncta e, f, g, ipsorum e g & f h, dimetientium extremitates: cum quibus dimetientibus, ipsius a b c d quadrati latera, ad rectos (ut præostensum est) conueniunt angulos. Tangit ergo circuli e f g h circunferentia, unumquodque latus eiusdem quadrati a b c d, per decimæsextæ tertij corollarium. Hinc per quintam huius quarti diffinitionē, in dato quadrato a b c d, circulus describitur e f g h. Quod faciendū fuerat.



Absolutio problematis.

Πρόβλημα θ, Πρόθεσις. θ.

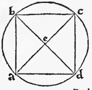
Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

Problema 9, Propositio 9.

Circa datum quadratum, circulum describere.

ORONTIVS. ¶Esto quadratum a b c d, circa quod oporteat describere circulum. Connectantur igitur a c & b d, rectæ lineæ, per primū postulatum, in puncto e, sese inuicem dirimentes. Et quoniam per quadrati diffinitionem, æqualis est a b, ipsi b c, & b d, utrique communis: binæ igitur a b, & b d, trianguli a b d, duabus d b, & b c, trianguli d b c, sunt æquales altera alteri: & basis a d, basi d c, itidem æqualis. Angulus igitur a b d, angulo d b c, per octauam primi est æqualis. Totus itaque angulus a b c, bifariam diuiditur sub recta b d. Haud aliter monstrabimus quod unusquisque reliquorum angulorum qui sub b a d, b c d, & a d c, bifariam itidem sub ipsa b d, & a c, recta diuiditur. Angulus porrò a b c, angulo b a d, per quartum postulatum est æqualis: nempe rectus recto. Quæ autem æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem, per septimam communem sententiam. Aequalis est igitur angulus a b e, angulo e a b: & proinde latus e a, lateri e b, æquale, per sextam primi. Eodem prorsus modo ostendemus, e c & e d rectas, tū adinuicē, tū ipsis e a, & e b, rectis lineis coæquari. Quatuor igitur e a, e b, e c, & e d, æquales sūt adiuicē. Cētro igitur e, interuallo autem e a, uel e b, aut e c, uel e d, circulus describatur, per tertium postulatum. Transibit ergo descriptus circulus per puncta a, b, c, d: quapropter & ipsius circuli circunferentia, tanget unumquenq; angu

Vt circūscribendi circuli centruminueniatur.



angulum ipsius quadrati a b c d. Per quartam igitur huius quarti diffinitionem, circa datum quadratum a b c d, circulus describitur. Quod oportuit fecisse.

Ostensio problematis priori similis.

Πρόβλημα ι, Πρόθεσις ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

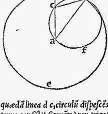
Problema 10, Propositio 10.

Isosceles triangulum constituere, habens vnumquenque eorum qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.

ORONTIVS. ¶*Hoc quæsitum, ad succedentium propositionum demonstrationem, ita confirmatur. Sit data recta quædam linea a b: quæ per undecimam secundi ita seceturin puncto c, ut comprehensum sub tota a b, & segmento b c rectangulum, æquum sit ei quod ex reliquo segmento a c fit quadrato. Et centro a, interuallo autem a b, circulus describatur b d e, per tertium postulatum. Et per primam huius quarti, in circulo b d e, datæ rectæ lineæ a c (quæ non est maior ipsius circuli diametro) æqualis recta linea à puncto b coaptetur: sitque b d. connectantúrque a d, & c d, lineæ rectæ, per primum postulatum. Triangulum erit igitur a b d, atque isosceles: æqualis est enim a b, ipsi a d, per quindecimam diffinitionem primi. Dico quòd unusquisque angulorum qui ad basin b d, duplus est reliqui anguli qui ad a. Circa enim triangulum a c d, per quintam huius quarti, describatur circulus a c d f. Et quoniam per constructionem, quod sub a b & b c continetur rectangulum, æquum est ei quod ex c a, fit quadrato: & ipsi c a, data est æqualis b d. ab æqualibus autem rectis æqualia describuntur quadrata, per*

Constructio figuræ.

Ostensio problematis.



corollariū quadragesimæsextæ primi. Cōprehēsū igitur sub a b & b c rectāgulū, æquū est ei, quod ex b d fit quadrato. Atqui b pūctū, extra circulū a c d f suscipitur: ab eóq; in circulū geminæ ꝓcidūt lineæ rectæ a b, & b d, quarū altera, utpote a b circulū secat, altera uerò b d, cadit; éstq; sub tota dispescēte & extrīsecus sūpta b c, cōprehensū rectāgulū, æquale ei ꝙ ex cadēte b d fit quadrato. Cadēs igitur b d, tāgit per ultimā tertij circulū a c d f, in pūcto d, utriq; circulo cōmuni. Rursū quoniā b d, recta tāgit circulū a c d f, & à cōtactu d, extēditur recta quædā linea d c, circulū dispescēs: angulus igitur b d c, angulo c a d (qui in alterno consistit segmēto) per trigesimāsecundā tertij est æqualis. Quòd si utrique æqualium angulorū addatur communis angulus a d c: totus angulus a d b, duobus qui sub c a d, et a d c sunt angulis, erit per secundā cōmunem sententiam æqualis. Eisdem porrò qui sub c a d et a d c, continentur angulis, exterior angulus

b c d per trigesimā secundā primi coæquatur. Per primā igitur cōmunē sententiā āgulus a d b, āgulo b c d est æqualis. Angulo rursū a d b, æquus est āgulus c b d, aut (si uelis) a b d, per quintā primi: sunt enim ad basim b d, isosceles trianguli a b d. Duo itaq; anguli b c d & c b d, eidē āgulo a d b sunt æquales: & æquales ppterea adinuicē, per primā cōmunem sententiā. Hinc latus c d lateri b d, per sextā ipsius primi coæquatur. Sed eidem b d, æqualis est per cōstructionem a c. bi... igitur a c & c d, eidem b d sunt æquales: & æquales itaq; rursū adinuicem, per eādem primā cōmunem sententiā. Angulus igitur a d c, āgulo c a d, per eādem quintā primi est æqualis: & uterq; ppterea dimidius ipsius āguli a d b, nā āgulus a d b eisdem āgulis a d c & c a d æqualis iā ostensus est. Duplus est igitur āgulus a d b, ipsius āguli qui ad a. Eidem porrò āgulo a d b, æqualis rursum est a b d: quæ autem æqualia sunt, eiusdem sunt duplicia, per sextæ cōmunis sententiæ cōuersionem. Et a b d itaq; āgulus, eiusdem anguli qui ad a duplus itidem est. Isosceles ergo triangulum constituitur a b d, habens unumquenque eorum qui ad basim b d sunt angulorum duplum reliqui. Quod facere oportebat.

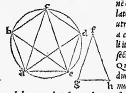
Πρόβλημα ια, Πρόθεσις ια.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Problema 11, Propositio 11.

Constructio inscribendi pentagoni.

IN dato circulo, pētagonū equilaterū & equiāgulū describere. ORONTIVS. Esto datus circulus a b c d e, in quo receptū sit describere pentagonum æquilaterū & æquiangulū. Constituatur per antecedentem decimā propositionem, triāgulū f g h: cuius unusquisque eorū qui ad basim g h sunt angulorū, duplus sit reliqui anguli qui ad f. Et per secundā huius quarti, in dato circulo a b c d e, dato triāgulo f g h, æquiāgulum triāgulum describatur a c e, sitq; angulus qui ad c, angulo qui ad f æqualis. Cū igitur uterque angulorum qui ad basim g h, duplus sit reliqui qui ad f: erit uterque eorū qui ad basim a e, reliqui anguli qui ad c itidem duplus. Secetur itaque bifariā, per nonā primi, uterque angulorum qui sub c a e & a e c, productis in circumferentiam a d & e b lineis rectis: & cōnectātur a b, b c, c d, & d e lineæ rectæ, per primū postulatū. Pentagonum itaque a b c d e rectilineū: & in dato circulo, per tertiā huius quarti diffinitionē descriptum.

Quòd inscriptum pentagonum sit æquilaterum.



Aio primùm, quod & æquilaterum. Nā āgulus qui sub a c e, dimidius est utriusque æqualium āgulorum qui sub c a e et a e c. Sed āguli c a d & d a e, ipsius c a e anguli item a e b et b e c, ipsius a e c sunt dimidium: secti enim sunt bifariam c a e & a e c anguli. Quæ autem eiusdē, uel æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicē, per septimā communē sententiā. Quinque igitur āguli a c e, a e b, b e c, c a d, et d a e, ad circumferentiā ipsius circuli cōsistentes, sunt adinuicem æquales. In eodem porrò circulo æquales āguli, in æqualibus circumferentijs subtenduntur, et si ad centrum, et si ad circumferentiā deducti fuerint, per uigesimā sextam tertij. Quinque ergo circumferentiæ a b, b c, c d, d e, et e a, æquales sunt

sunt adinuicem. In eodem rursum circulo, sub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ subtenduntur, per uigesimã nonã ipsius tertij. Aequales itaque inuicem sunt præfatas circumferentias subtendentes lineæ rectæ: et ꝑinde a b c d e pentagonũ æquilaterũ. ¶ Dico tandẽ ꝙ & æquiãgulũ. Quoniã circũferẽtia a b, circumferẽtiæ c d est æqualis: si utriq; æqualiũ addatur cõmunis circumferentia a e d, resultabũt a e d c & b a e d circumferentiæ, per secundã cõmunem sententiã inuicẽ æquales. Sub ipsa porrò circumferentia a e d c, deducitur angulus a b c: sub ipsa autẽ b a e d, angulus b c d, & uterq; ad circumferentiã eiusdẽ circuli. Aequalis est igitur angulus a b c, angulo b c d sub æqualibus enim circumferentijs, æquales deducuntur anguli, in eodẽ potissimũ circulo, & si ad centrũ & si ad circumferentiã fuerint deducti, per uigesimã septimã tertij. Haud dissimiliter ostendemus, reliquos angulos qui sub c d e, & d e a, & e a b, tũ inuicẽ, tũ unicuique ipsorum a b c & b c d coæquari. Aequiangulum est igitur a b c d e pentagonum. patuit & quòd & æquilaterum. In dato itaque circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum receperamus.

Quòd idem pentagonum sit æquiãgulũ.

Πρόβλημα ιβ. Πρότασις ιβ.

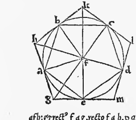
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.. Problema 12, Propositio 12.

12 Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

ORONTIVS. ¶ Sit rursum datus circulus a b c d e, cuius centrũ f: circa quẽ oporteat describere pentagonũ æquilaterũ & æquiãgulum. Describatur in primis in ipso circulo dato, pentagonũ æquilaterũ & æquiãgulum a b c d e, per antecedentẽ undecimã ꝓpositionem: & cõnectãtur f a, f b, f c, f d, & f e semidiametri, per primũ postulatũ. A punctis autẽ a, b, c, d, e, ad rectos utrinq; suscitẽtur ãgulos a g, a h, b h, b k, c k, c l, d l, d m, e m & e g, ꝑ undecimã primi. In directũ igitur cõstituẽtur g a h, h b k, k c l, l d m, & m e g, per decimãquartã eiusdẽ primi tãgẽntq; circulũ datũ, per decimæsextæ tertij corollariũ, in pũctis quidẽ a, b, c, d, e. Cõuenient insuper ad pũcta g, h, k, l, m. Recta enĩ a b, incidẽs in g h & h k rectas, diuidit utrũq; ãgulũ rectũ qui sub f a h & h b f, efficitque propterea interiores et in eadẽ parte ãgulos a b h et h a b duobus rectis minores: necessũ est igitur rectas g h et h k, in infinitũ productas, tãdẽ cõcurrere ad partes h, per quintum postulatum. Haud dissimiliter ostẽdemus, quòd h k et k l cõuenient ad punctum k, atq; k l et l m ad punctũ l, necnõ l m et m g ad punctũ m: et m g tãdẽ g et h ad punctũ g. Pẽtagonũ est igitur g h k l m: et circa datũ circulũ a b c d, per sextã huius quarti diffinitionẽ descriptum. ¶ Aio iã ꝙ et æquilaterum. Cõiungãtur enĩ f g, f h, et f k rectæ lineæ, per primum postulatum. Cùm igitur f a ipsi f b, per circuli diffinitionẽ sit æqualis: isosceles est triãgulum a f b, et ꝑinde ãgulus f a b, angulo f b a, per quintã ipsius primi est æqualis. Atqui rectus f a h, recto f b h, per quartũ postulatũ æquus est: reliquus igitur ãgulus a b h, reliquo h a b, per tertiã cõmunẽ sententiã est æqualis. Et latus ꝓpterea a h lateri b h, per sextã eiusdẽ primi æquũ est. Similiter ostendetur ꝙ a g ipsi g e, et b k ipsi k c, est æqualis: & cõsequẽter ita de cæteris. Rursũ quoniã a f, ipsi f b, est æqualis, et f h utriq; cõis: et duo igitur latera a f, et f h, triãguli a f h, duobus b f et f h, trianguli h f b sunt

Pẽtagoni propositi circunscriptio.

Quòd circũscriptum pentagonum, sit æquilaterũ.



æqualia alterũ alteri: basis quoq; a b, basi g b, æqualis. Angulus igitur a f b, ãgulo b f b, æqualis est per octauã primi: & uterq; pinde, ipsius anguli a f b dimidius. Eodẽ modo colligemus, angulũ a f g, dimidiũ fore ipsius anguli a f e. Atqui anguli a f b, & a f e, æquales sũt adiuicẽ, per uigesimãseptimã tertij: nẽpe ad cẽtrũ f, sub circũferentijs a b, et a e inuicẽ æqualibus deducti. Quæ autẽ æqualiũ sũt dimidiũ, æqualia sũt adinuicẽ per septimã cõmunẽ sententiã. Aequalis est igitur angulus a f g, angulo a f h: & rect⁹ f a g, recto f a h, p quartũ postulatũ æqualis. Triãgula igitur a f g, & a f h, habẽt duos ãgulos duobus ãgulis æquales alterum alteri, unúmq; latus a f, utriq; cõmune, quod æquis adiacet angulis: reliqua igitur latera, reliquis lateribus æqualia habebunt, per uigesimãsextã primi. Aequalis est igitur a g, ipsi a h, & tota cõsequenter g h, ipsius a h dupla. Haud aliter ostẽdemus quòd h k, dupla est ipsius b h. Porrò a h, & h b, æquales præostẽsæ sunt. Quæ autẽ æqualium duplicia sunt, adinuicẽ sunt æqualia, per sextã cõmunẽ sententiã: æqualis est igitur g h, ipsi h k. Similiter quoq; demõstrabitur, quòd cætera ipsius pẽtagoni latera, utpote k l, l m, & m g, bifariã diuiduntur: & tum inuicẽ, tum utriq; ipsarum g h, & h k, sunt æqualia. Aequilaterum est igitur g h k l m pentagonum.

Quòd idem circũscriptũ pentagonum sit æquiangulum.

¶ Dico tãdẽ, ꝙ & æquiãgulum. Quoniã enĩ ostensum est a h, ipsi h b fore æqualem, necnõ & a g, ipsi g e,: quatuor igitur a h, h b, a g, & g e, æquales sunt adinuicem. Bina ergo triangula a h b, & a g e, habent duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & basim a b, basi a e æqualem (sunt enim latera inscripti a b c d e pentagoni, æquilateri & æquiãguli) ãgulus igitur a h b, angulo a g e, per octauã primi est æqualis. Similiter ostẽdemus, ꝙ reliqui ãguli qui sub b k c, & c l d, atq; d m e, tum inuicẽ, tum utriq; ipsorum a g e, & a h b, respõdenter coæquãtur. Aequiãgulum est itaq; g h k l m, pentagonum. Patuit ꝙ & æquilaterum: descriptúmq; circa a b c d e, circulum. Circa datum ergo circulum a b c d e, pẽtagonũ æquilaterũ & æquiãgulũ describitur g h k l m. Quod oportuit fecisse.

Πρόβλημα ιγ. Πρότασις ιγ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι. Problema 13, Propositio 13.

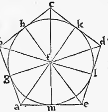
IN dato pẽtagono ęquilatero & ęquiãgulo, circulũ describere.

Vt centrum inscribendi circuli reperiatur.

ORONTIVS. ¶ Esto datũ pentagonũ æquilaterum & æquiãgulum a b c d e, in quo expediat describere circulum. Secetur in primis uterq; ãgulorum a b c, et b a e bifariã, per nonã primi, sub rectis quidẽ lineis a f, & b f: quas operæpretiũ est tandem conuenire. Angulus enim a b c, minor est duobus rectis (nam aliàs a b, et b c, in rectum constituerentur) quapropter et angulus a b f, dimidius ipsius anguli a b c, recto minor est. Et proinde b a f, recto itidem minor. Hinc fit, ut recta a b, incidat in a b, et b f lineas rectas, efficiens in eadem parte interiores angulos binis rectis minores. Concurrent igitur, per quintum postulatum a f, et b f, in directum productæ: idque intra datum pentagonum.

Angu-

Angulo enim a b c, opponitur latus d e: & c d latus, ipsi b a e angulo. Recta igitur a f, in rectum extensa, cadet in latus c d: & ipsa b f, in latus d e: sese inuicem intra datum intersecantes pentagonum. Secent se igitur, & concurrant in puncto f. Aio punctum f, fore centrum describendi in dato pentagono circuli. Connectantur enim f c, f d, & f e, lineæ rectæ, per primum postulatum. Cùm igitur a b sit æqualis b c, & b f, utriq; communis: erũt bina latera a b, & b f, triãguli a b f, duobus lateribus c b, & b f triãguli c b f alternatim æqualia: & qui sub æquis lateribus cõtinentur anguli a b f, & c b f, sunt per constructionẽ adinuicẽ æquales. Basis igitur a f, basi f c, & angulus b a f, angulo b c f, per quartã primi est æqualis. Angulus porrò b a f, dimidius est ipsius anguli b a e: & ipsi b a e, æqualis angulus b c d, per hypothesin. Quæ autem inuicem æqualia sunt, eiusdem uel æqualium dimidium esse uidentur: per septimæ communis sententiæ conuersionem. Angulus igitur b c f, dimidius est ipsius anguli b a e, & proinde anguli b c d: reliquus insuper angulus f c d, dimidius itidem est eiusdem anguli b c d. Bifariam itaque diuiditur angulus b c d, sub recta c f. Nec dissimiliter ostendetur, uterque reliquorum angulorum qui sub c d e, & d e a, bifariam discindi sub rectis lineis d f, & e f: atque f e, f d, & f c rectas, tum inuicem, tum ipsis f a & f b coæquari. Diuidantur consequenter singula ipsius pentagoni latera bifariam, per decimam primi, in punctis g, h, k, l, m: & connectantur rectæ lineæ f g, f h, f k, f l, & f m, per primum postulatum. Erunt igitur singulæ ipsorum laterum medietates inuicem æquales: quæ enim æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem, per septimam communem sententiam. Et quoniam triangulorum g b f, & f b h, duo latera g b, & b f, duobus lateribus f b, & b h. sunt æqualia alterum alteri, & angulus g b f, angulo f b h, æqualis: basis igitur g f, basi f h, per quartam primi est æqualis. Haud dissimiliter ostendentur reliquæ f k, f l, & f m, tum inuicem, tum utrique ipsarum f g, & f h, coæquari. Quinq; ergo rectæ lineæ f g, f h, f k, f l, & f m, sunt æquales adinuicẽ. Cẽtro itaq; f, interuallo autẽ f g, aut f h, uel f k, seu f l, aut f m, circulus describatur g h k l m, per tertium postulatum. Transibit ergo ipsius circuli circumferentia, per singula puncta g, h, k, l, m. Et quoniam triangulorum a g f, & f g b, duo latera a g, & g f, duobus f g, & g b, sunt æqualia alterum alteri, & basis a f, basi f b, æqualis: angulus igitur a g f, angulo f g b, per octauam primi est æqualis: & proinde uterque rectus, per decimam primi diffinitionem. Haud aliter ostendetur uterque angulus qui circa reliqua pũcta h, k, l, m, esse rectus. Tangit itaque dati circuli circumferentia singula ipsius pentagoni latera, per decimæsextæ tertij corollarium. Circulus porrò in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua describitur tangit, per quintam huius quarti diffinitionem. In dato igitur



Quòd inuentũ punctum f, centrũ existat eiusdem circuli.

Problematis absoluta resolutio.

igitur pentagono a b c d e, circulus describitur g h k l m. Quod expediebat facere.

Πρόβλημα ιδ, Πρόθεσις ιδ.

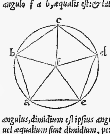
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Próblema 14, Propositio 14.

14

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulũ, circulum describere.

ORONTIVS. ¶ Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum a b c d e, circa quod circulum describere sit operæpretium. Secetur bifariam uterque angulorum qui sub a b c, & b a e, per nonam primi, productis a f, & b f, lineis rectis: quæ per quintum postulatũ, concurrãt tandẽ adinuicem intra datũ pentagonum: uterque enim angulus qui sub a b f, & f a b, recto minor est, nempe dimidius anguli ipsius pentagoni, qui binis rectis minor est. Concurrant igitur ad punctum f: & connectantur f c, f d, & f e, lineæ rectæ, per primum postulatum. Et quoniam angulus a b c, angulo b a e, est æqualis: & quæ eiusdem uel æqualium sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem, per septimam communem sententiam. Angulus igitur a b f, angulo f a b, æqualis est: & latus propterea a f, lateri f b æquale, per sextam primi. Rursum quoniam latus a b, lateri b c, est æquale, & b f, utrique commune: bina ergo latera a b, & b f trianguli a b f, binis lateribus f b, & b c trianguli f b c, sunt æqualia alterum alteri: & æquos inuicem continent angulos, per constructionem. Basis igitur a f, basi f c, per quartam primi est æqualis: & reliquus angulus b c f, reliquo f a b æqualis. Angulus porrò f a b, dimidium est anguli b a e: & b c f igitur angulus, dimidium est ipsius anguli b c d. quæ enim æqualia sunt, eiusdem uel æqualium sunt dimidium, per septimæ communis sententiæ conuersionem. Reliquus igitur angulus f c d, eiusdem anguli b c d est dimidium: & proinde ipsi angulo b c f æqualis. Haud aliter ostendentur f d ipsi f b, & f e ipsi f e: & omnes demũ quinque lineæ rectæ, ex puncto f in singulos angulos incidentes coæquari. Centro igitur f, interuallo autem f a, uel f b, aut f c, uel f d, aut f e circulus describatur a b c d e, per tertium postulatum. Veniet ergo ipsius circuli circũferentia, per singula puncta a, b, c, d, e: tangẽtq; propterea unumquẽque angulum dati pentagoni. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum a b c d e: circulus per quartam huius diffinitionem, describitur. Quod faciendum fuerat.



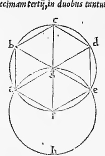
Πρόβλημα ιε, Πρόθεσις ιε.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Proble-

15 IN dato circulo, hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

ORONTIVS. ¶ Esto datus circulus a b c d e f; cuius centrum g: in quo quidem circulo oporteat describere hexagonum æquilaterum & æquiangulum. Coaptetur itaque in circulo a b c d e f, dimetiens c f. Et centro f, interuallo autem f g, describatur per tertium postulatum circulus a g e h. Et quoniam præfati circuli in eodem sunt plano, communem habentes semidiametrum f g, & centrum unius in alterius circumferentia constituitur: fit ut unus prædictorum circulorum, sit partim intra reliquum, partim uerò extra. Vnde necessum est, circulum a g e h, intersecare datum circulum a b c d e f: idque per decimam tertij, in duobus tantummodo punctis, utpote a & e. Coniunguntur igitur a g, & e g lineæ rectæ, per primum postulatum: & per secundum postulatum, directè producãtur in puncta b, d. Rursum per idem primum postulatum, connectantur rectæ lineæ a b, b c, c d, d e, e f, & f a. Hexagonum est itaque a b c d e f rectilineum: & in dato circulo, per tertiam huius quarti diffinitionem, descriptum. ¶ Aio primum ipsum fore æquilaterum. Quoniam punctum g, centrum est circuli a b c d e f: æqualis est igitur a g, ipsi g f, per circuli diffinitionem. Rursum quoniam punctum f centrum est circuli a g e h: æqualis est, per eadẽ circuli diffinitionẽ, a f ipsi f g. Binæ igitur a g & a f, eidẽ f g sunt æquales: & æquales propterea adinuicem, per primã communem sententiã. Aequilaterum est igitur ipsum a f g triãgulũ: & pinde æquiãgulum, per quintæ libri primi corollariũ. Et quoniã per trigesimasecũdã primi, omnis triãguli tres anguli sunt æquales duobus rectis: quilibet triũ angulorũ eiusdẽ triãguli a f g, unũ tertiũ duorũ rectorum cõprehendit. Angulus itaq; a g f, duorum rectorũ tertium est. Et proinde triãgulum e f g, æquilaterũ & æquiãgulum est: & angulus consequenter f g e, unum itidem tertium duorum rectorum. Recta insuper a g, consistens super rectam b e: efficit duos angulos b g a & a g e, binis rectis æquales, per decimamtertiam ipsius primi. quorum a g e, duo tertia eorundem duorum rectorum comprehendit: reliquus igitur angulus b g a, uni tertio duorum rectorũ est æqualis. Quilibet igitur trium angulorum b g a, a g f, & f g e, uni tertio duorũ rectorum est æqualis: & æquales ob id adinuicem, per primã cõmunem sententiã. Et qui ad uerticem igitur cõsistunt anguli b g c, c g d, & d g e, eisdem angulis, per decimam quintam primi coæquantur: hoc est, d g e ipsi b g a, & c g d ipsi a g f, atq; b g c ipsi f g e. Hinc colligitur, sex angulos ad g centrum deductos fore inuicem æquales. In eodem porrò circulo æquales anguli, in æqualibus circumferentijs



Inscriptio propositi hexagoni.

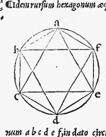
Quòd inscriptum hexagonum sit æquilaterum.

subtendūtur, per uigesimā sextam tertij. Sex igitur circūferētiæ a b, b c, c d, d e, e f, & f a, sunt adinuicē æquales. Sub æqualibus rursum circūferētijs, æquales rectæ lineæ, per uigesimā nonā tertij subtendūtur. Sex itaq; rectæ lineæ a b, b c, c d, d e, e f, & f a, sibi inuicē coæquantur. Aequilaterū est propterea hexagonum a b c d e f. ¶ Dico iam, quòd & æquiangulum. Nam circumferentia a b, circunferentiæ c d est æqualis: si addatur igitur communis circunferentia d e f a: consurgent per secundam communem sententiam, æquales circūferentiæ c d e f a, & d e f a b. Sub ipsa porrò circumferentia c d e f a, continetur angulus a b c: sub ipsa uero circumferentia d e f a b, angulus b c d. Anguli autem qui super æquales circumferentias in eodem circulo deducuntur, sibi inuicem sunt æquales: etsi ad centra, etsi ad circumferentias deducti fuerint, per uigesimamseptimam tertij. Aequalis est igitur angulus a b c, angulo b c d. Haud aliter monstrabitur, quòd reliqui anguli ipsius a b c d e f hexagoni, utpote c d e, d e f, & e f a, tum sibi inuicē, tum utrique ipsorum a b c, & b c d, coæquantur. Aequiangulum est igitur ipsum a b c d e f hexagonum. Patuit iam quòd & æquilaterum, & in dato circulo descriptū.

Quòd idē hexagonum sit æquiangulū.

¶ Idem rursum hexagonum æquilaterum & æquiangulum, aliter in dato describitur circulo. Sit datus circulus a b c d e f: in quo describatur in primis triangulum æquilaterum & æquiangulum, per secundā huius quarti. Erunt igitur arcus a b, c d e, & e f a, tum per uigesimamsextam, tum per uigesimamoctauam ipsius tertij inuicem æquales. Diuidatur quilibet ipsorum trium arcuum bifariam, per trigesimam eiusdem tertij, in punctis quidem b, d, f: & connectantur a b, b c, c d, d e, e f, & f a, lineæ rectæ, per primum postulatum. Descriptum erit igitur hexagonum a b c d e f, in dato circulo per tertiam huius quarti diffinitionem: quod palam est fore æquilaterum. Singuli enim arcus ipsa latera subtendentes, æquales sunt adinuicem, nempe æqualium (hoc est) ipsorum a b c, c d e, & e f a, dimidij: & sub æqualibus eiusdem circuli arcubus, æquales subtenduntur rectæ lineæ, per uigesimamnonam eiusdem tertij. Aequalia sunt igitur ipsius hexagoni latera. Aio quòd & æquales comprehendunt angulos: unusquisque enim ipsius hexagoni angulus, sub æqualibus deducitur arcubus: nempe sub quatuor circunferentiæ partibus, qualium ipsa circunferentia est sex. Aequales igitur sunt adinuicem ipsius hexagoni anguli, per uigesimāseptimam eiusdem tertij. In dato igitur circulo a b c d e f, hexagonum æquilaterum & æquiangulum describitur. Quod fecisse oportuit.

Alia eiusdem hexagoni descriptio facillima.



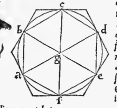
Corollarium.

¶ Hinc fit manifestum, quòd hexagoni latus, ei quæ ex centro circuli, in quo ipsum describitur hexagonum, est æquale. Ostensa est enim utraque a f, & f e (quæ latera sunt hexagoni) ipsi f g, quæ ex cētro g, æqualis: & a f, ipsi a g, atque

tque f e, ipsi e g, itidem æqualis. ¶ Item si per puncta a, b, c, d, e, f, rectæ ducantur lineæ circulum ipsum contingentes, & cum illius dimetientibus ad rectos conuenientes angulos: hexagonum æquilaterum & æquiangulum circa datum circulū [de]scribetur: quemadmodum ex duodecima huius quarti propositione de pentagono, & obiecta figura uel facile deducetur. ¶ Præterea, nec minus facile in dato hexagono æquilatero & æquiangulo, circulum describere, & circumscribere poterimus: per ea quæ decimatertia & decimaquarta propositione, de pentagono ipso præostensa sunt. Quod ex supradictis colligere oportebat.

Vt circulo hexagonum circumscribatur.

De circuli in dato hexagono inscriptione, ac circumscriptione.



Πρόβλημα ις, Πρότασις ις,

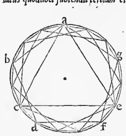
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Problema 16, Propositio 16.

IN dato circulo, quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

ORONTIVS. ¶ Sit datus circulus a b c d e, in quo receptum sit describere quintidecagonū æquilaterū & æquiangulū. Describatur in primis su per data quapiā recta linea terminata triangulū æquilaterum, per primā primi: quod per quintæ eiusdem primi corollarium, erit æquiangulum. Huic post modum triangulo, æquiangulum rursum describatur triangulum in dato circulo a b c d e, per secundam huius quarti propositionem: sitque a c e. Item à puncto a, in eodem circulo a b c d e, pentagonum æquilaterū & æquiangulum describatur a b d f g, per undecimam huius quarti. Erit igitur triangulum a c e, æquilaterum, per sextæ primi libri corollarium: cuius latus quodlibet subtendit tertiam circumferentiæ partem circuli a b c d e. quodlibet autem ipsius a b d f g pentagoni latus, subtendit quintam eiusdem circumferentiæ partem. Qualium igitur partium uel segmentorum, tota circuli a b c d e circumferentia est quindecim: talium segmentum a b c erit quinque, & utrūque segmentum a b & b d trium, & proinde totum segmentum a b d, sex. Et quoniam segmētum a b c est quinque: erit reliqua pars c d, sextum ipsius a b d, seu tertium ipsius b d, & totus propterea a b c d e circuli quindecimum. Coniuncta igitur c d, recta, per primum postulatum,

Artificiosa lateris quintidecagoni adinuentio.



erit latus quintidecagoni in dato circulo describēdi. Cui si æquales rectas lineas in dato circulo a b c d e, ab ipso quidem puncto d, uersus e, & a, in c, cōtinuè, per primam huius quarti coaptaueris: erit in eodem circulo descriptum quintidecagonum æquilaterum. ¶ Poterunt & singulorum quindecim segmentorum distinctiones, per ipsius pentagoni æquilateri & æquianguli, in dato circulo b c d e, geminatam rursum descriptionē obtineri, à punctis quidem c & e: & cōparatis inuicem segmentis, demonstratiuè concludi. Quēadmodum ex ipsa licet inspicere figura. ¶ Aio iam, quòd ipsum quintidecagonum æquilaterum, est æquiangulum. Quibuslibet enim angulis, sub duobus quibusuis ipsius quintidecagoni lateribus ad circūferentiā comprehensis, æquales subtenduntur circunferentiæ: nempe segmentorum inuicem æqualium tredecim, qualium totus circulus est quindecim. In eodem porrò circulo, anguli qui super æquales circunferentias deducuntur, sibiinuicem sunt æquales, & si ad centra, etsi ad circunferentias fuerint deducti, per uigesimamseptimam tertij. Aequiangulum est igitur ipsum a b c d e, quintidecagonum. Patuit quòd & æquilaterum, & in dato circulo descriptum: In dato itaque circulo a b c d e, quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum describitur. Quod tandem faciendum receperamus.

Idem aliter.

Quòd descriptum quintidecagonū æquilaterum, sit æquiangulum.

Corollarium.

¶ Quòd si per singulas segmentorum & angulorum quintidecagoni distinctiones, rectæ ducantur lineæ circulum ipsum contingentes, & ad rectos angulos cum productis è centro semidiametris conuenientes: quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum, circa datum circulum describetur, quemadmodum duodecima huius quarti propositione, de circumscribendo tradidimus pentagono. ¶ Haud dissimiliter, per ea quæ decimatertia & decimaquarta eiusdem quarti propositione, de pentagonis ostensa sunt: in dato quintidecagono æquilatero & æquiangulo circulum describere, ac circumscribere licebit.

Quarti libri Geometricorum Elementorum,

FINIS.

Orontij Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, in quintum elementorum Euclidis, Demonstrationes.

¶Diffinitionum elucidatio non aspernanda.

ORONTIVS.

POSTQVAM Euclides quatuor antecedentibus libris, quātitatis cōtinuæ qualitatem, illiúsq; dimensiones apertè demōstrauit: iā binis succedentibus libris, magnitudinū rationes, atq; ꝓportiones, acutissimis ꝑsequitur ostensionibus. Huius itaq; libri quinti scopus est, *de proportionibus in uniuersum pertractare: singula enim quæ in eo demonstrantur, non solùm ad geometricā uidentur spectare cōtemplationem, sed cō nume aliquid habent cum Arithmetica, & Musica, & cum doctrinis omnibus quæ sub mathematicæ traditione comprehenduntur. Verùm quoniam de proportionibus futurus est sermo, proportio autem rationum uidetur esse similitudo: de rationibus, quibus ipsæ componuntur proportiones, in primis tractandū est: prius enim oportet agnoscere, simplicia, quàm composita. Cùm igitur binæ magnitudines inuicem comparantur: hæ proculdubio aut æquales, aut inæquales offenduntur. Proprium enim quantitatis esse diffinit Aristoteles, secundum eam æquale, uel inæquale dici: & huiuscemodi comparatio, habitudo dicitur, quam Euclides ad ueterum imitationem, rationem appellat. Ipsæ autem magnitudines, termini tunc uocitantur: illa quidem quæ alteri refertur, antecedens: reliqua uerò, consequens, ad quam scilicet alterius fit comparatio. Id porrò, quo altera distat à reliqua, differentia propriè dicitur.* ¶*Quoties itaque propositæ & adinuicem comparatæ magnitudines, fuerint inæquales, & minor metiatur maiorem, hoc est, aliquotiens sum pta, seu per datum aliquem multiplicata numerum, ipsam maiorem restituit magnitudinem: tunc minor magnitudo, pars ipsius maioris dicitur: quam uulgus peculiari nomenclatura, iuxta multiplicationis numerum, multiplicatiuam seu quotam partē eiusdem maioris adpellat. Quæ ab Euclide sic primum diffinitur.*

Scopus huius libri quinti.

Magnitudinum comparatio.

Habitudo.

Ratio.

Quota seu multiplicatiua pars.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

¶ *Μέρος ἐστὶ μέγεθος, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον,*

1 Pars est magnitudo magnitudinis minor maioris, quando minor metitur maiorem.

Exemplū quotæ partis.

Vtpote, binis magnitudinibus datis, quarum altera bidepalis, altera uerò sextupedalis existat, quoniam bipedalis ter sumpta, seu per tria multiplicata, sextupedalem metitur magnitudinē: idcirco bipedalis magnitudo, pars est ipsius sextupedalis magnitudinis, & tertia pars eiusdem sextupedalis peculiari discretione uocatur. ¶Ipsa porro maior magnitudo, quam minor supradicta multiplicatione metitur: multiplex ipsius minoris adpellatur magnitudinis, hoc est, multotiens ipsam minorem comprehendens magnitudinem, uel ex multiplici eiusdem minoris repetitione consurgens. Hinc dicit Euclides.

Multiplex.

¶Πολλαπλάσιον δὲ, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Multiplex autem, maior minore, quando eam metitur minor. 2

Exemplum multiplicis.

Vt in præassumpto nuper exemplo, sextupedalis magnitudo multiplex dicitur ipsius bipedalis magnitudinis, utpote, quòd multotiens, hoc est, ter eandem bipedalem contineat magnitudinem, seu quam bipedalis ter multiplicata metitur: & propterea sextupedalis, triplex ipsius bipedalis peculiari restrictione uocatur. ¶Cùm autem minor magnitudo aliquotiens sumpta, seu multiplicata, plus aut minus efficit, quàm sit ipsa magnitudo maior: non quota, sed adgregatiua pars ipsius maioris uidetur esse magnitudinis; ex quotis scilicet partibus adgregata, ab ipsarum partium quotarum tum numero, tum qualitate denominanda. Veluti quadrupedalis ad sextupedalē relata magnitudinem, adgregatiua pars eiusdem sextupedalis dicenda est magnitudinis. Componitur enim ex geminis bipedalibus magnitudinibus, quarū quælibet tertiam sextupedalis partem efficit: hinc bipartiēs tertias eiusdem sextupedalis denominatur. ¶Quæ igitur adinuicem comparatæ magnitudines, communi aliqua metiuntur magnitudine: commensurabile, seu cōmunicantes, & rationales adpellantur. Cuiusmodi sunt omnes numeri, a binario in infinitum distributi, quos indifferēter metitur unitas: omnes insuper ad numeros relatæ magnitudines, determinatā inter sese rationem uel habitudinem obtinentes. Quibus autem non accidit communis aliqua, & per numerum expressa mensura: incommensurabiles, & incommunicātes, irrationalésue dicuntur magnitudines, quarum habitudo determinatis non exprimitur numeris. Veluti sunt diagonius, & latus quadrati geometrici.

Pars adgregatiua.

Exemplum.

Cōmensurabiles & rationales magnitudines.

Incommensurabiles & irrationales.

Illa igitur rationalium uel irrationalium, seu commensurabilium, & incommēsurabilium magnitudinum comparatio, uel habitudo, ratio (quemadmodum supra dictum est) à ueteribus adpellatur: quæ ab Euclide in hunc modum diffinitur.

¶Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis, aliquatenus adinuicem quædam habitudo. 3

Quæ inuicē cōparantur.

Sola enim uniuoca ueniunt inter sese comparanda, utpote, numerus numero, linea lineæ, superficies superficiei, solidum solido, sonus sono, tempus tempori, uelocitas uelocitati, & quæ sunt huiuscemodi. Inter ea enim quæ diuersorum sunt

generum,

generum, nulla uidetur accidere comparatio ¶ Offenditur autem ratio inter numeros absolutè consideratos, quã arithmeticam nuncupamus rationẽ: interue sonoros, hoc est, ad sonorũ harmoniã relatos numeros, quæ harmonica ratio dicitur: uel inter abstractas tũ à motu, tum à materia magnitudines, quæ geometrica propriè nominatur. Quæcunq; porrò rationes inter ipsos inueniuntur numeros, eædẽ inter singula continuorum offenduntur genera: at non è diuerso. Arithmetica siquidẽ ratio, tantummodo rationalium uidetur esse magnitudinum: geometrica uerò, tam rationalium, quàm irrationalium contemplatur magnitudinum habitudinem. Quæcunque insuper rationis diuersitates uni continuorũ accidunt generi, utpote lineis: cæteris continuorum uidentur euenire generibus, superficiebus inquã & solidis: quod ipsis non solet accidere numeris. Idcirco de geometrica, & ueluti principatum obtinente ratione, hoc loco tractare principaliter intendit Euclides. ¶ Duplex est autem ratio geometrica: altera quidem æqualitatis, cuius differentia nulla est: altera uerò inæqualitatis, cuius rationales species sunt quinque: tres quidem simplices, utpote multiplex, superparticularis, & superpartiens: & duæ ex eis compositæ, scilicet multiplex superparticularis, & multiplex superpartiẽs. Primò igitur doctrina simpliciũ, postea cætera in uniuersum perscrutantur rationum discrimina: debet enim simplicium doctrina, in omnibus doctrinam, præcedere compositorum. ¶ Multiplicem itaque solemus adpellare rationem, quoties maior magnitudo minorem (ut suprà dictum est) pluries & adæquatè comprehẽdit magnitudinem: quæ in duplã ut quaternarij ad binariũ, triplã ueluti senarij ad ipsum binariũ, quadruplam ut duodenarij ad ternariũ, & deinceps ita quantũlibet subdiuiditur, pro ut maior, magnitudo bis, ter, quater, pluriésue minorem comprehendit. Super particularis autem ratio dicitur, cùm maior magnitudo minorẽ semel, & quotam insuper minoris partem continet: quæ sesqualtera dicitur, ut ternarij ad binariũ: aut sesquitertia ueluti quaternarij ad ternarium: uel sesquiquarta, ut quinarij ad quaternarium, & respondenter ita quantumlibet, prout pars ipsa alteram minoris magnitudinis partem, uel tertiam, aut quartam, aliámue quotã partem efficit, à dato quouis numero denominatam. Superpatientem uerò rationem adpellamus, quoties maior magnitudo minorem itidem semel comprehendit, & contingentem præterea uel adgregatiuam eiusdem minoris partem, ex quotis ipsius minoris partibus compositam: quæ uaria, pro numero ac ratione partium, sortitur discrimina, gemino indigentia numero, altero quippe multitudinem, altero autem nomenclaturam talium partium exprimente: sic tamen ut, ipse numerator, à denominatore sola unitate superetur. Alia enim superbipartiens tertias dicitur, ut quinarij ad ternarium: alia supertripartiẽs quartas, uelut septenarij ad quaternarium: alia uerò superquadripartiens quintas, ueluti nouenarij ad quinarium, & deinceps ita sine statu, uocitatur. ¶ Hinc facilè colligitur, utriusque compositarum rationum diffinitio. Multiplex enim & superparticularis ratio dicitur, cùm maior magnitudo minorẽ pluries, & quotam insuper eiusdem minoris partem comprehendit. Multiplex denique & superpartiens ratio nominatur, quoties eadem magnitudo maior, minorem itidem pluries, & partem ultra non quotam, sed ex quotis eiusdem minoris partibus

Ratio. Arithmetica Harmonica. Geometrica.

Ratio. Aequalitatis Inæqualitatis.

Ratio multiplex.

Superparticularis ratio.

Ratio superpartiens.

Multiplex superparticularis.

Multiplex superpartiens.

bus adgregatam continet. Quæ tum pro uarietate multiplicis, tum pro utriusque & superparticularis & superpatientis diuersitate, in uaria, & (si liceat dicere) infinita compositarum rationum partiuntur discrimina. ¶ Cæteræ autem ab his magnitudinum habitudines, quarum denominationes ignoramus: surdæ, irrationalésue nuncupantur. Porrò hæc omnia uelim intelligas, dum maiores minoribus comparantur magnitudines: nam si minores ipsis maioribus comparentur magnitudinibus, subrationales erunt minores maioribus. Hinc talium magnitudinum rationes, submultiplices, subsuperparticulares, subsuperpartientes, submultiplices superparticulares, & submultiplices superpartientes, pro ratione atque transpositione terminorum, adpellantur. ¶ Cuiuslibet autem suprascriptarum rationum cum alia quauis simili ratione comparatio uel habitudo (non ut magnitudo magnitudini, sed ut hæc ratio cum illa ratione comparatur) proportio dicitur: cuius hæc est summaria diffinitio,

Surdæ rationes.

Notandum.

De rationum cōparatione.

¶ Ἀναλογία δὲ ἐστὶ, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

Proportio verò, est rationum identitas.

Hoc est, duarum pluriúmue geometricarum rationum similitudo: ut si duplam duplæ, sesqualteram sesqualteræ, plurésue duplas, aut sesqualteras, & alias quascunque similes rationes inuicem comparaueris. Nam de Arithmetica proportione, quam uocant æqualium differentiarum inter datos numeros obseruatam progressionem: nihil ad præsentem doctrinam. Neque de proportione musica, quæ potius harmonia quædam esse uidetur: utpote, quæ sit cùm oblatis tribus numeris, quam rationem maximus obtinet ad minimum, eam quoque seruat differentia maximi supra medium ad differentiam medij supra minimum, in suprascripta rationum similitudine minimè consistens. Sicuti enim arithmetica progressio, à musica differre perhibetur harmonia: sic & geometrica proportio (quæ sola peculiari nomine proportionis uenit adpellanda) ab utraque distinguitur. ¶ Est autem geometrica proportio, aut continua aut discontinua. Continuam adpellamus proportionem, cùm datis quotlibet eiusdem generis quantitatibus, omnium antecedentium ad proximè succedentes continuata seruatur rationis habitudo: sicut prima solùm antecedentis, ultima uerò consequentis, intermediæ autem & antecedentis & consequentis funguntur officio. Vtpote, cùm prima ad secundam eam seruat rationem, quam secunda ad tertiã, & tertia ad quartã, & deinceps ita quantùlibet. Quæcũque igitur continua proportione ligantur, eiusdem oportet esse generis: propter necessariam cuiuslibet antecedentis cum suo consequẽte respondentiam, & continuandam inuicem comparabilium habitudinem, siue relationem. ¶ Discontinua uerò proportio fit, cùm oblatis quatuor pluribúsue quantitatibus, prima ad secundam eam habet rationem, quam tertia ad quartam, & quinta ad sextam, & consequenter ita quantumlibet. Huiuscemodi nanque rationum similitudo, uel identitas, proportio, sed discontinua uocitatur. consequens enim primæ rationis, non fit antecedens secundæ, neque item consequens ipsius secundæ, in tertiæ rationis continuatur antecedens: uelut ipsi continuæ diximus euenire proportioni. Possunt itaque genere diuersa, discontinua inuicem proportione colligari: ob singulorum antecedentium, ad singula consequentia, separatim

De proportione arithmetica.

De musica proportione.

Proportio geometrica cōtinua.

Sola vniuoca continua proportione ligãtur.

Discontinua proportio geometrica.

Genere diuersa discontinuam proportionem obseruant.

tim factam comparationem. Eadem nanque ratio inter duos accidens numeros: potest simul inter duas lineas, binásue superficies, aut alias quasuis inuicē comparabiles inueniri magnitudines. Hinc patet, discontinuam proportionē sub pari semper terminorum comprehendi numero: continuam uerò tam parem, quam imparem admittere terminorum seu quantitatum multitudinem.

> Corollarium

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται, πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

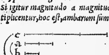
Rationem habere adinuicem magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ inuicem excedere.

Post ipsius rationis, atque proportionis assignatas diffinitiones: describit cōsequenter Euclides qualiter inuicem comparatæ magnitudines rationem habere dicantur. Cùm igitur tam rationalium quam irrationalium hic perscrutētur magnitudinum habitudines, & ipsa irrationalium magnitudinum habitudo, tum nobis, tū ipsi naturæ sit ignota, denominationē ab aliquo non ualēs accipere numero: coactus est Euclides (ut generalē quādā rationaliū & irrationaliū perscriberet diffinitionē) ad comparatarū inuicem magnitudinum confugere multiplicationem, hoc est, per ipsarum magnitudinum æquè multiplicia diffinire, qualiter magnitudo alteri comparata magnitudini rationem habere dicatur.

> Quónam modo magnitudines rationē habere diffiniantur.

Si igitur magnitudo a magnitudini b comparetur, & ambæ æqualiter multiplicentur, hoc est, ambarum sumantur æque multiplicia, c quidem ipsius a, & d ipsius b: quam rationem habebit multiplex c ad multiplex d, eā seruabit & a magnitudo, ad b magnitudine. Quasi ignota inter a & b differentia, per multiplicationē ipsarum augeatur magnitudinum, & in rationis ignotæ nos inducat agnitionem.

> Exemplum.



Tanta siquidem multiplicium cum submultiplicibus, seu partibus inuenitur esse fraternitas: ut ipsæ æque multiplices magnitudines nō possint aliquam rationalem aut irrationalem inter sese habitudinem obseruare, quin ea simul partibus accidat submultiplicibus, & è contrario.

> Notandum.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα.

6 In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: quando primæ & tertiæ æquè multiplicia, secundæ & quartæ æquè multiplicia, iuxta quauis multiplicationem, vtraque vtranque vel vnà excedunt, vel vnà equales sunt, vel vnà deficiunt sumptæ adinuicem.

Ostensa rationis atque proportionis diffinitione, qualiter insuper magnitudines rationem habere adinuicem indicentur: diffinit respōdenter Euclides, quónā modo magnitudines ipsæ fiant proportionales, hoc est, similē uideantur obtine-

> Quæ magnitudines in eadem ratione consistant.

re rationẽ, habitudinisue nãciscantur identitatẽ. Quæ diffinitio nõ potuit per alicuius præcedẽtiũ quinq; rationaliũ specierũ ipsius rationis uel habitudinis, utpote aut multiplicis, aut superparticularis, aut superpartiẽtis, uel multiplicis superparticularis, uel deniq; multiplicis superpatientis describi similitudinẽ: ꝓpter surdas (ut uocant) irrationaliũ magnitudinũ habitudines, quarũ denominationes exprimi nõ possunt. Cõfugiendũ ergo fore existimauit Euclides, ad cõtingentẽ æquè multipliciũ habitudine, tã cõtinuæ, quàm separatim facta earũdem magnitudinum relatione. Nã in proportionibus sicuti antecedentia adinuicem, & ipsa pariter consequentia, mutuam quandam inter sese uidentur habere relationem: haud dissimiliter ipsorum antecedentium, pariter & consequentium æquè multiplicia, iuxta quamuis multiplicationem coassumpta, fraterna quadã rationum colligantur similitudine, atque è diuerso: tametsi alia inter ipsa æquè multiplicia, ab ea quæ inter partes offenditur submultiplices, contingat plerũq; rationum identitas. Quòd autem ex multiplicium proportione, earundem partiũ submultipliciúmue magnitudinum proportio, uel è contrario subsequatur: succedentibus ostendetur propositionibus. prius enim diffinire, quam diffinitorũ concludere necessitatem est operæpretiũ.

Notandum.

Diffinitionis elucidatio.

℄ Cùm itaque similitudo rationis, binariũ ad minus rationum, & proinde quaternarium magnitudinum uideatur exoptare numerum: ait Euclides, magnitudines in eadẽ esse ratione, prima quidem ad secundam, & tertia ad quartam: quando primæ & tertiæ, hoc est antecedẽtium magnitudinũ sumptis æquè multiplicibus, & cõsequentiũ itidẽ magnitudinũ, secundæ uidelicet & quartæ, æquè multiplicibus (etiã in alia quãuis ab antecedentiũ multiplicatione) coassũptis, multiplex primæ ad multiplex secũdæ eam seruat rationem, quã multiplex tertiæ ad multiplex quartæ: siue ipsa ratio maioris, aut minoris extiterit inæqualitatis. Hæc enim de excessu uel defectu proportionali ueniunt intelligenda. Velut ex obiecta nmerorũ potes colligere formula. In qua numeri dati sint a, b, c, d: & ipsorum a & c, primi inquàm & tertij æquè multiplices e,, f nempe dupli: numerorum autem b, d, hoc est secundi & quarti æquè itidem multiplices g, h, utpote tripli. Et quoniam multiplex e, ad multiplicem g, eam habet rationem, quam multiplex f ad multiplicem h (utrobiquè enim sesquitertia) necessum est primum numerum a ad secundum numerum b eam simul obseruare rationem, quam tertius numerus c ad quartum d, nempe duplam. Haud aliter de magnitudinibus, siue continuis intelligito.

Exemplum.

a	b		c	d	
12	6		8	4	Nu. discõtinuè proportionales.
e	g		f	h	
24	18		16	12	Aequè multiplices.

℄ Hinc fit, ut in continuè proportionatis, ubi uidelicet consequens primæ rationis sit antecedens secundæ, sumenda sint æquè multiplicia singularum magnitudinum iuxta eandem multiplicationem; hoc est, aut simul tripla, aut simul quadrupla, &c. propterea quòd secunda magnitudo, ipsius tertiæ simul fungatur officio, & geminas potentia magnitudines repræsentat. Vt datis in exemplum a, b, c, numeris: quorum æquè multiplices sint d, e, f, utpote tripli, d quidem ipsius a, & e ipsius b, atque f ipsius c.

De continuè proportionalibus.

Exemplum.

a	b	c	
8	4	2	Nu. continue proportionales.
d	e	f	
24	12	6	Aeque multiplices.

si multiplex d ad multiplicem e habuerit eam rationem, quam idem e ad f: tunc a primus numerus ad secundum b, eam simul obseruabit rationem, quam idem numerus b, ad tertium c. quemadmodum ex ipsa numerorum potes elicere descriptione: in qua tam dati numeri a, b, c, quam eorundem numerorum æque multiplices d, e, f, sub dupla inuicem ratione proportionãtur.

¶ Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

7 Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

Diffinitio proportionaliũ.

Cùm enim proportio, rationum sit identitas: fit ut magnitudines, quæ in eadem offendentur esse ratione, uel inter quas rationum offendetur similitudo (siue continua, siue discontinua eiusdem rationis obseruetur identitas) proportionales adpellentur.

¶ Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8 Quando verò multiplicium multiplex primi excesserit multiplex secundi, multiplex autem tertij non excesserit multiplex quarti: tunc primum ad secundum maiorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Improportionaliũ magnitudinum diffinitio.

Quemadmodum datarum magnitudinum continuam uel discontinuam proportionem, ex coassumptorũ æque multiplicium, & ordinatim comparatorum proportione pendere diffinitum est: haud dissimiliter & improportionaliũ magnitudinum disproportio, ex suprascripto modo sumptorum æquè multiplicium disproportione, uersa uice colligitur. Est enim disproportio, rationum dissimilitudo: utpote, quando prima magnitudo ad secundam maiorem uel minorem rationem habet, quam tertia ad quartam. Huius itaque diffinitionis hæc est summa. Si quatuor oblatarum magnitudinum coassumantur æquè multiplicia primæ & tertiæ, atque secundæ & quartæ, & multiplex primæ ad multiplex secundæ maiorem rationem habuerit, quàm multiplex tertiæ ad multiplex quartæ: tunc prima magnitudo ad secundam maiorem itidem rationem obseruabit, quam tertia ad quartam: & si minorẽ, minorem. Et proinde rationum subsequetur dissimilitudo, ergo disproportio: siue ipsæ magnitudines cõtinua, uel discontinua ratione, seu relatione terminorum inuicem conferantur. Quorum exempla dare, inutile iudicamus: utpote, quæ à contraria proportionalium interpretatione colligi uel facilè possunt.

Disproportio.

Diffinitionis interpretatio

Corollarium.

Hinc fit, ut cùm æquè multiplicium ſupraſcripto modo coaſſumptorum, multiplex primi non exceſſerit multiplex ſecundi, ſed multiplex tertij exceſſerit multiplex quarti: tunc primum ad ſecundum minorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Ἀναλογία δὲ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

Proportio autem, in tribus terminis ad minus eſt.

De continua uerò intelligas proportione. Cùm enim proportio rationum exiſtat ſimilitudo: operæpretium eſt in ipſa proportione duas ad minus inuicē ſimiles occurrrre rationes, & proinde terminos quatuor, duo inquàm antecedētia & totidem conſequentia. Et quoniam in proportione continua, conſequens primæ rationis fit antecedens ſecundæ, im diſcontinua uerò minimè: fit ut cōtinua proportio non poſſit conſiſtere in paucioribus tribus terminis, diſcontinua autem in paucioribus quatuor. Hi ſunt ergo numeri terminorum minimi, inter quos uidetur accidere proportio: maximi uerò, unſquam dabiles ſunt, ut pote, quoniam ſimilitudo rationum in infinitum poteſt deuenire numerum.

Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Quam rationē habeat prima magnitudo ad vltimā in continuè proportionalibus.

Quando tres magnitudines proportionales fuerint: prima ad tertiam duplo maiorem rationem habere dicetur, quàm ad ſecundam. Quando autem quatuor magnitudines proportionales fuerint prima ad quartam triplo maiorem rationem habere dicetur, quàm ad ſecundam, & ſemper ordine vna plus, quouſque ſit abſoluta proportio. 10

Vbi tres tantum magnitudines proportionales.

Hinc diffinit Euclides quam rationem habeat prima magnitudo ad ultimam, in continuè proportionalibus. Senſus itaque diffinitionis eſt, ꝙ in proportione continua ratio extremarum magnitudinum, ex ſingulis rationibus in eadē occurrentibus proportione inuicem compoſitis generatur. Hinc fit, ut in minima proportione, quæ ſub tribus comprehenditur terminis, prima magnitudo ad ultimam duplo maiorem rationem habere dicatur, quàm habeat ad ſecundā, hoc eſt, ex ipſis duabus rationibus ſimilibus, primæ inquā magnitudinis ad ſecūdā, & eiuſdē ſecūdæ ad tertiā inuicem compoſitis, uel altera earum duplata cōſurgentem. Multiplicandi ſunt, igitur ipſarum rationum denominatores adinuicem: producetur enim optatæ rationis denominator: quēadmodum ſecundo capite libri quarti noſtræ docuimus Arithmeticæ: & quinta diffinitione libri ſexti clarius oſtēdemus. Sint exēpli gratia obiecti numeri a, b, c, ſubdupla ratione ꝓportionati. utrꝗ; igitur ratio à binario denominatur numero. Bis autē duo efficiunt quatuor: à quibus ratio primi numeri ad tertium, hoc eſt, a ad c denominabitur. Erit ergo primi ad ipſum

Exemplum



ipsum tertium ratio quadrupla,seu primi ad secundũ duplicata. ¶Porrò si quatuor extiterint magnitudines continuè itidem proportionales:prima ad quartã triplo maiorem rationem habere dicetur,quam ad secundã,hoc est,ex tribus rationibus ,primæ quidẽ ad secundã,& secundæ ad tertiam , atque tertiæ ad quartã generatã. sed animaduertas oportet,quod in trium aut plurium rationum compositione,operæpretium est ex duabus primis unã efficere rationem,& ex illa consequenter & succedente tertia unã rursum constituere:& deinceps ita quàmtumuis,pro datarum rationum multitudine.Denturin exemplũ quatuor numeri continue proportionales d,e,f,g,sub dupla itidem ratione distributi.

16 8. 4. 2.
d e f d



Quæ habet igitur trium rationum , à binario rursum denominatur numero:bis autem duo, efficiunt quatuor , quæ ostendunt primũ nu numerum ad tertiũ,uel secundum ad quartum,quadruplam obtinere rationem. bis autem quatuor restituunt octo: a quibus octupla ratio denominatur]. Aio itaque eundẽ primimum numerum ad quartũ,octuplam seruare rationem: quæ nonpropterea primi ad secundum triplata ratio uocitatur,quod ipsa ratio primi ad secũdũ per tria sit multiplicãda:sed quoniã ter in eadẽ proportione reperiatur,ex qua quidẽ triplici ratione, extremorũ ratio suprascripto modo cõsurgit. Eadem quoque ratio primi ad quartũ resultabit, si eã rationẽ quæ est primi ad tertiũ,uel secundi ad quartũ, per rationẽ eiusdẽ primi ad secundũ multiplicaueris. Vtraque enim in præassumpto numerorum exemplo est quadrupla:quæ in duplam ducta,restituit octuplam. ¶Quòd si quinque magnitudines continuè fuerint proportionales , prima ad quintam quadruplo maiorem rationem habere dicetur,quam ad secundam:si sex,quintuplo maiorem,& consequenter ita,una semper ordinatim adiunctã ratione , pro extensione proportionis,uel adiũcto magnitudinum cõtinuè proportionaliũ numero. ¶Ομόλογα μεγέθη λέγεται ἦν,τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις , τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Vbi quatuor magnitudines continuè fuerint proportionales.

Notandum.

Exemplum.

Vbi quinque vel plures fuerint magnitudines.

11 Similis rationis magnitudines dicuntur, antecedentia antecedentibus,& consequentia consequentibus.

De varia rationum similitudine.

Id est,similitudo rationum inter easdem magnitudines inuicem proportionales,non solum inuenitur per relationem antecedentium ad sua consequentia,uel è diuerso:sed tum ex ipsorum antecedentium,tum etiam consequentium inuicem facta comparatione. Ex quibus subscriptæ rationum illationes, speciésque proportionum deriuatæ sunt:quæ primum diffiniuntur ab Euclide,postea suo eluci dantur & ostenduntur ordine.

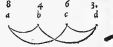
¶Εναλλὰξ λόγος ἐστὶ,λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον,καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

12 Permutata ratio est, acceptio antecedentis ad antecedẽs,& con sequentis ad consequens.

Permutata seu reciproca ratio.

Vtpote,si fuerint quatuor magnitudines inuicẽ proportonales a,b ,c,d,sicut

quidem a ad b, ita c ad d: inferamus autē, & permutatim igitur sicut a ad c, ita b ad d. Hāc rationū illationem, permutatā appellamus. permutatur enim consequēs primæ rationis, in antecedēs secūdæ: & antecedens eiusdē secūdæ rationis, in cōsequens ipsius primæ uertitur. Primæ itaque rationis uterque terminus antecedentis: & uterque terminus secundæ rationis, consequentis fungitur officio.



¶ Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

Conuersa ratio, est acceptio consequentis tanquam antecedentis, ad antecedens tanquam ad consequens. 13

Id est consequentium in antecedentia, & antecedentium in consequentia permutatio: rationem maioris inæqualitatis, in rationem minoris, aut è diuerso, conuertendo. Vt si a ad b, eam habuerit rationem quam c ad d: & à conuersa terminorum ratione inferamus: ergo sicut b ad a, ita d ad c. Igitur in permutata atque conuersa ratione, nulla terminorum subsequitur alteratio: sed & antecedentia, & consequentia manent substantialiter eadem.

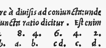
Notandum.

¶ Σύνθεσις λόγου ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Composita ratio, est acceptio antecedentis cum consequente, sicut vnius, ad ipsum consequens. 14

Illatio rationis à diuisis ad coniūcta. Exemplum.

Solemus nonnunquā in proportionibus, arguere à diuisis ad coniuncta: unde huiuscemodi rationis illatio, composita, seu coniuncta ratio dicitur. Est enim acceptio cuiuslibet antecedentis cū proprio cōsequente, tanquā unius antecedētis, ad ipsum consequens. Vtpote, si a ad b, eam habeat rationem quam c ad d: & cōiunctim inferamus. Igitur sicut a b, ad b: ita c d ad d. augentur enim proportionaliter antecedentia, per consequentium ipsorum cōpositionem. Huic contraria est diuisa, seu disiuncta ratio: quæ ita diffinitur.



¶ Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Diuisa ratio, est acceptio excessus, quo excedit antecedens ipsum consequens, ad ipsum consequens. 15

Illatio rationis, à coniunctis ad diuisa.

Hoc est, comparatio differentiæ cuiuslibet antecedentis supra consequēns proprium, ad ipsum consequens. Veluti si eadem sit ratio a b ad b, quæ est c d ad d: & diuisim in hunc modū inferatur, igitur sicut a ad b, ita c ad d. Est enim a differētia, qua tota a b ipsam b superat: & c itidem differētia, qua tota c d ipsam excedit d. Hic autem modus arguendi, à coniunctis ad diuisa nūcupatur.

¶ Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

Conuer-

Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum, quo excedit antecedens ipſum conſequens.

Hanc rationis illationem: plerique euerſam ſeu reflexam nominant. Eſt enim cõparatio cuiuſlibet antecedentis, ad differentiam, qua idem antecedens ſuum excedit conſequens. Exempli gratia: Sit rurſum ueluti a b ad b, ita c d ad d: & conuertamus in hunc modum. Ergo ſicut a b ad a, ita c d ad c. Sunt enim a & c differentiæ, quibus b & d ab ipſis a b & c d ſuperantur. In compoſita igitur, & diuiſa ratione, ac conuerſione rationis, quanquàm nihil ſumatur extrinſecum: alterantur nihilominus termini, ijdem ſecundum ſubſtantiam minimè permanentes.

Euerſa ſeu reflexa ratio.



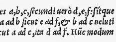
Notandum.

Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, ἢ ἄλλως, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Aequa ratio eſt, pluribus exiſtentibus magnitudinibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cum duabus ſumptis & in eadem ratione: quando fuerit ſicut in primis magnitudinibus primũ ad vltimum, ſic in ſecundis magnitudinibus primum ad vltimum. Vel aliter: acceptio extremorum, per ſubtractionem mediorum.

Exempli gratia, ſint primi ordinis quantitates a, b, c, ſecundi uerò d, e, f: ſitque a ad b ueluti d ad e, & b ad c ſicut e ad f: uel a ad b ſicut e ad f, & b ad c ueluti d ad e: & concludendo ſubinferamus. Igitur ſicut a ad c, ita d ad f. Hũc modum arguendi, ex æquali, aut ex æqua ratione uocitamus. Vt ſi a ad b & d ad e ſeſqualteram, b autem ad c & e ad f duplam obtinuerit rationem: uel a ad b, & e ad f dupla, b autem ad c atque d ad e ſeſqualtera ratione proportionetur: neceſſum eſt a ad c, atq; d ad f, triplam obſeruare rationem, ut ex ipſa numerorum potes elicere formula. Aequa igitur ratio, tam in ijs quæ ordinatam, quàm etiam perturbatam obſeruant proportionem reperitur.

Inferendi modus ex æqua ratione.



Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι. οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

T. Or-

Ordinata proportio est, cùm fuerit antecedens ad consequens, sicut antecedens ad consequens: & consequens ad rem aliam, sicut consequens ad rem aliam.

Expeditis quæ ex eadem proportione subinferuntur rationum cōparationibus: diffinit tandem Euclides, binas proportionum species, inter geminos proportionalium magnitudinum ordines accidentes. Ordinatam itaque proportionem adpellamus, quando antecedentium & consequentium ordinatim fit comparatio. Ut si bini (uerbi gratia) fuerint numerorum ordines, a, b, c inquam primus, & d, e, f secundus: fueritque a ad b ueluti d ad e, & b ad c sicut e ad f. Hanc rationum identitatem, ordinatam solemus uocitare proportionem. Huic contraria est perturbata, quæ sic diffinitur.

Exemplum ordinatę proportionis.

a	b	c		d	e	f
9	6	3		12	8	4

¶ Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν τῶν μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἱγουμένου πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς προτοῖς μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸ ἄλλό τι.

19 Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & alijs eis æqualibus multitudine: fit sicut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequens, sic in secundis magnitudinibus antecedens ad consequens, sicut autem in primis magnitudinibus consequens ad rem aliam, sic in secundis res alia ad antecedens.

Hæc diffinitio tam lucida est, ut ampliori non uideatur indigere declaratione. Non grauaberis tamen exemplarem intelligere formulam. Sint igitur rursum a, b, c, & d, e, f gemini numerorū ordines: sitque a ad b sicut e ad f, & b ad c ueluti d ad e. Hunc itaque inuersum proportionis ordinem, perturbatam proportionē adpellamus.

Exemplū perturbatæ rationis.

a	b	c		d	e	f
8	6	4		6	4	3

De extensa, atque inordinata ratione.

¶ Præter has autem, Zambertus Venetus adiecit extensæ atque inordinatæ proportionis diffinitiones, ab ipsius ordinatæ atque perturbatæ proportionis diffinitionibus minimè discrepantes: quas tum quia in græcis nusquam reperi exemplaribus, tum quòd mihi superabundare uideantur, consulto prætermisi. Omnis siquidem extensa proportio, ordinata est: & inordinata, eadem quæ perturbata. Ni forsitan uoluerimus extensam proportionem, terminorum utriusque ordinis continuatam præsupponere relationem: cùm scilicet præcedentium rationum consequentia, fiunt antecedentia succedentium, ut extensa proportio, continuè proportionalium solummodò respiciat magnitudinum habitudinem: ordinata uerò, tam continuè, quàm discontinuè proportionata. Et sic extensa proportio, simul erit ordinata: sed non omnis ordinata, extensa uocabitur. Idem uelim habeas iudicium, de inordinata atque perturbata proportione.

Notandum.

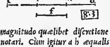
Θεώρημα α, Πρότασις, α.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Theorema I. Propositio I.

SI fuerint quælibet magnitudines quarumlibet magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices: quotuplex est vnius vna magnitudo, totuplices erũt & omnes omnium.

ORONTIVS. *Exordium sumit Euclides, à ratione multiplici, quæ est omnium simplicissima, utpote, quæ unico denominatur & exprimitur numero. Ait itaque primùm. Si quotlibet antecedentes magnitudines, totidem consequentium magnitudinum, in data ratione multiplici fuerint proportionales: omnes antecedentes omnium consequentium, ut una antecedentium ad suam consequentem, in eadem ratione multiplici coniunctim proportionales erunt. Sint enim a b & c d quælibet magnitudines, ipsarum e & f magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices: utpote, a b ipsius e, & c d ipsius f. Aio, a b & c d magnitudines, totuplices fore ipsarum e & f magnitudinum, quotuplex est a b ipsius e, uel c d ipsius f. Nam ex hypothesi tot sunt magnitudines in a b, æquales ipsi e: quot in c d magnitudine, æquales ipsi f. Sit utraque multitudo, æqualis numero g. Et distinguatur (exempli gratia) in a b, magnitudines æquales ipsi e, iuxnumerum g, sintque a h, h k, & k b: in ipsa porrò c d, æquales ipsi f, quæ sint c l, l m, & m d. Cuilibet enim magnitudini, quotlibet dari, uel adsignari posse æquales, recipiendum est. Omnis prætcrea magnitudo, in determinatas quotlibet, & adinuicem æquales partes (& si forsitan nondum præostensum fuerit, quanam ratione id exequatur) abstractiuè saltem partibilis est: potéstque*



magnitudo quælibet discretione quadam (ac si seorsum distincta foret) annotari. Cùm igitur a h æqualis sit ipsi e, & c l ipsi f: æquales erunt a h & c l, ipsis e & f magnitudinibus, per secundam communem sententiam. Rursum quoniam æqualis est h k ipsi e, & l m ipsi f: æquales rursum erunt, per eandem communem sententiam, h k & l m, ipsis e, & f. Haud dissimiliter ostendetur, quòd & cæteræ k b & m d, eisdem e & f coæquantur. Quoties igitur a b continet ipsam e, aut c d ipsam f: toties a b & c d, easdem e & f simul cõprehendunt, nempe secundum eundem numerum g. Quotuplex igitur est a b ipsius e, uel c d ipsius f: totuplices sunt a b & c d, ipsarum e & f. Idem respondẽter licebit ostendere: ubi plures duabus, plurium fuerint æque multiplices. Hoc autem in discretis euidentius manifestatur: quemadmodum sequentes formulæ uidentur indicare numeri. Si fuerint igitur quælibet magnitudines quarumlibet

Notandum.

Deductio theorematis.

magnitudinũ:&c.ut in theoremate.Quod oportebat demonstrare.

	2	1		3	1		4	1		5	1
Nu. in du-	4	2	In ratione	6	2	In ratione	8	2	In rõne	10	2
pla rõne p-	6	3	tripla	9	3	quadrup.	12	3	quintupla	15	3
portional.	8	4		12	4		16	4		20	4
	10	5		15	5		20	5		25	5
Coniũcti.	30	15	Coniũcti.	45	15	Coiũcti.	60	15	Coiũcti.	75	15

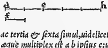
Θεώρημα β, Πρόθεσις β.

EΑν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον, καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον, καὶ ἕκτον τετάρτου.

Theorema 2, Propositio 2.

SI prima secundæ æquè fuerit multiplex & tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquè multiplex & sexta quartæ: & composita prima & quinta secundæ æqué multiplex erit, & tertia & sexta quartæ. 2

ORONTIVS. *¶Id est si æquè multiplicib⁹ æquè multiplices addãtur magnitudines, cõsurgẽt æque multiplices. Sint enĩ sex magnitudines, a b prima, c secũda, d e tertia, f quarta, b g quinta, & e h sexta: quarum prima a b secundæ c sit æquè multiplex, ac tertia d e ipsius quartæ f: & quinta rursum b g eiusdem secundæ c æquè multiplex esto, ac sexta e h eiusdem f quartæ.*



Aio quòd composita ex prima & quinta, utpote a g, ipsius secundæ c erit æquè multiplex: ac tertia & sexta simul, uidelicet d h, ipsius quartæ f. Cùm enim ex hypothesi, æquè multiplex est a b ipsius c: ut d e, ipsius f: quot igitur magnitudines sunt in a b æquales ipsi c, tot sunt & in d e æquales ipsi f. Rursum quoniã b g æquè multiplex est eiusdẽ c, ac e h eiusdẽ f: tot igitur sunt magnitudines eidẽ c æquales in b g, q & in e h æquales eidẽ f. Quot igitur sunt magnitudines in tota a g, ipsi c æquales: tot sũt & in tota d h, æquales ipsi f. si enĩ æqualibus multitudinibus, æquales addantur multitudines: resultabunt, per secundam communem sententiam, multitudines adinuicem æquales. Quotuplex igitur est a g ipsius c: totuplex est d h ipsius f. Sed a g, continet primam & quintam magnitudinem: d h autem, tertiam & sextam. Et cõposita igitur prima & quinta a g, secundæ c æquè multiplex erit: ac tertia & sexta d h, ipsius quartæ f. Igitur si prima secundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ: & quæ sequuntur reliqua. Quod fuerat ostendendum.

Demõstratio theorematis.

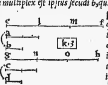
Θεώ-

Θεώρημα γ, Πρόθεσις γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ διίσου τῶν ληφθέντων, ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὃ μὲν, τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ, τοῦ τετάρτου. Theorema 3, Propoſitio 3.

SI primum ſecundi æque fuerit multiplex, & tertium quarti, ſumantur autem æquè multiplicia primi & tertij: & æquè ſumptorum vtrunque vtriuſque æquè erit multiplex, alterum quidem ſecundi, alterum autem quarti.

ORONTIVS. ¶Hoc eſt, q̃ æquè multipliciũ, ſũt æquè multiplicia: eadẽ partiũ æquè multiplicia ſunt. Sit primũ a ſecũdi b æquè multiplex, ac tertiũ c ipſius quartī d: & accipiãtur ipſorũ a & c æquè multiplicia, e f & g h. Dico quòd e f tã multiplex eſt ipſius ſecũdi b, quã multiplex eſt g h ipſius quarti d. Cùm enim per hypotheſin, totuplex ſit e f, ipſius a, quotuplex eſt g h ipſius c: tot igitur erũt magnitudines in e f æquales ipſi a, quot in magnitudine g h æquales ipſi c. Sit utraque multitudo, iuxta numerum k. & diſcernantur (maioris euidentiæ gratia) in e f, magnitudines æquales ipſi a, ſintque e l, l m, & m f: & in g h magnitudine, ipſi c æquales, utpote g n, n o, & o h. Et



quoniam per hypotheſin, æquè multiplex eſt a ipſius b, atq; c ipſius d. Eſt autem e l ipſi a, & g n ipſi c per conſtructionem æqualis. Aequalia porrò eiuſdem ſunt æquè multiplicia, per ſextæ diffinitionis primi libri conuerſionem. Aequè multiplex igitur eſt e l ipſius b, ac g n ipſius d. Et proinde l m æquè multiplex itidem eſt ipſius b, ac n o ipſius d. ſunt itaque ſex magnitudines, quarum prima e l ſecundæ b æquè multiplex eſt, ac tertia g n ipſius quartæ d: quinta rurſum l m eiuſdem ſecundæ b æque multiplex eſt, ac ſexta n o eiuſdem quartæ d. Et compoſita igitur prima & quinta e m ipſius ſecundæ d, æquè multiplex eſt, ac tertia & ſexta g o ipſius quartæ d: per antecedentem ſecundam propoſitionem. Rurſum quoniam æqualis eſt m f ipſi a, & o h ipſi c: æquè multiplex itidem erit m f ipſius b, atque o h ipſius d, per eandem ſextæ diffinitionis primi libri conuerſionem. Oſtenſum eſt autem, e m & g o ipſarum b & d fore æquè multiplices. Sunt itaq; rurſum ſex magnitudines, quarum prima e m ſecundæ b æquè multiplex eſt, ac tertia g o ipſius quartæ d: quinta inſuper m f eiuſdem ſecundæ b æquè eſt multiplex, ac ſexta o h eiuſdem quartæ d. Et compoſita igitur prima & quinta e f, ipſius ſecundæ b æquè multiplex eſt, ac tertia & ſexta g h eiuſdem quartæ d: per allegatam huius quinti ſecundam propoſitionem. Et deinceps ita quantumlibet, prioribus conſequentes adiungendo magnitudines, pro contingẽte ipſorum æquè multiplicium e f & g h multitudine. Atqui multitudo e l, l m, & m f, multitudini g n, n o, & o h æqualis eſt: utraque enim ipſi k numero æqualis. Si igitur primum ſecundi æquè fuerit multiplex & tertium quarti: &c. ut in theoremate.

Primus oſtenſionis diſcurſus.

Secundus priori ſimilis diſcurſus oſtenſionis.

theoremate. Quod fuerat ostendendum.

Θεώρημα δ, Πρόθεσις δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Theorema 4, Propositio 4.

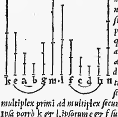
Si primum ad secūdum eandem habuerit rationem, & tertium ad quartum: & æquè multiplicia primi & tertij, ad æquè multiplicia secundi & quarti iuxta quanuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta adinuicem.

De æquè multiplicium & submultiplicium proportione reciproca.

ORONTIVS. *Sicuti enim ex ipsorum æque multiplicium proportione, datas magnitudines in eadem esse ratione, sexta huius quinti uisa est innuere diffinitio: haud dissimiliter ex ipsarum magnitudinum habitudine proportionata, eorundem æque multiplicium uersa uice concluditur rationis identicas. tanta est æque multiplicium cum submultiplicibus necessitudo. Esto igitur ut primum a ad secundum b eandem habeat rationem, quam c tertium ad quartum d: & accipiantur ipsorum a & c, hoc est, primi & tertij æquè multiplicia e & f, secundi pariter & quarti, utpote, ipsorum b & d alia itidem æque multiplicia g & h. Aio quòd e multiplex primi, ad g multiplex secundi eandem habet rationem, quam f multiplex tertij ad h multiplex quarti.*

Demonstatio theorematis.

Sumantur enim ipsorum e & f, æque multiplicia k & l: ipsorum porrò g & h, alia similiter æque multiplicia m & n. Cùm igitur e totuplex sit ipsius a, quotuplex est f ipsius c, & ipsorum e & f sumpta sunt æquè multiplicia k & l, primæ inquam & tertiæ magnitudinis: igitur æque multiplex est k ipsius a, & l ipsius c, per tertiam huius quinti. et per eandem, æque multiplex est m ipsius b, atque n ipsius d. Est autem ex hypothesi, sicut a ad b ita c ad d: & ipsorum a & c ostensa sūt æque multiplicia k & l, necnon ipsorum b & d alia itidem æque multiplicia m & n. Est igitur sicut k ad m, ita l ad n: per conuersionem sextæ diffinitionis huius quinti. hoc est, sicut multiplex primi ad multiplex secundi, ita multiplex tertij ad multiplex quarti. Ipsa porrò k & l, ipsorum e & f sunt æqu. multiplicia: m uerò & n æque multiplicia ipsorum g & h, per constructionem. Est igitur ut e ad g, sic f ad h: per sextam huius quinti diffinitionem. Atqui e & f, sunt æque multiplicia primi et tertij: g autem et h, secundi et quarti alia itidem æque multiplicia. Si primum igitur ad secundum eandem habuerit rationem: et quæ sequuntur reliqua. Quod demonstrandum susceperamus.



Lemma

Lemma siue assumptum.

¶Et quoniam ostensum est, quòd multiplex k ad multiplex m se habet, ut multiplex l ad multiplex n. si igitur k excedit m, et l proportionaliter excedit n: et si æquale, æquale: et si minus, itidem proportionaliter minus. Quare et uersauice, si m excedit k, et n proportionaliter excedit l: & si æquale, æquale: si autem minus, & proportionaliter denique minus. Et proinde, per sextam huius quarti diffinitionem, erit ut g ad e, sic h ad f: atque respondenter sicut b ad a, ita d ad c.

¶Corollarium.

¶Si quatuor igitur magnitudines fuerint proportionales: & è contra, seu à conuersa ratione proportionales erunt: facta uidelicet consequentium tanquàm antecedentium, ad antecedentia tanquam ad consequentia relatione. Conuersa ratio.

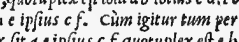
Θεώρημα ε, Πρόθεσις ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσαι πολλαπλάσιον ὁσαπλάσιον ἐστὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Theorema 5, Propositio 5.

SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, & ablata ablatæ: & reliqua reliquę erit multiplex, quotuplex tota totius est multiplex.

ORONTIUS. ¶Esto magnitudo a b magnitudinis c d tam multiplex, quàm multiplex est ablata a e ablatæ c f. Dico reliquam e b, reliquæ f d totuplicem fore, quotuplex est tota a b totius c d. Ponatur enim e b æque multiplex ipsius g c, ut a e ipsius c f. Assumptum. Cùm igitur tum per hypothesin, tum per constructionem, totuplex sit a e ipsius c f, quotuplex est e b ipsius g c: quotuplex autem est una unius, totuplices sunt & omnes omnium, per primam huius quinti. Demõstratio theorematis. Quotuplex est itaque a e ipsius c f, totuplex est tota a b totius g f. At quotuplex est a e ipsius c f, totuplex est & eadem a b ipsius c d, per hypothesin. Et a b igitur utriusque et



g f & c d est æque multiplex: & proinde utraque g f & c d, eiusdem a b æque submultiplex est. Quæ autem eiusdem sunt æquesubmultiplicia, æqualia sunt adinuicem, per septimam communem sententiam. Aequalis est igitur g f ipsi c d, & utrique communis c f: qua dempta, reliqua g c reliquæ f d, per tertiam communem sententiam est æqualis. Aequalia rursum eiusdem sunt æque submultiplicia, per ipsius septimæ cõmunis sentẽtiæ conuersionem. Et g c igitur atque f d, eiusdem e b sunt æque submultiplices: et proinde e b utriusque et g c et f d æque est multiplex. Porrò e b æque multiplex est ipsius g c, per constructionem, ut a e ipsius c f, et eadem propterea e b, ipsius f d tam multiplex est, quàm multiplex est ipsa a e eiusdem c f. Atqui per hypothesin a e totuplex est ipsius c f, quotuplex est tota a b totius c d. Et reliqua igitur e b, reliquæ f d æque multiplex est, atque tota a b totius c d. Ergo si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex et ablata ablatæ, et reliqua reliquæ: etc. ut in theoremate. Quod ostendere fuerat operæpretium.

Θεώρημα λα, Πρόθεσις λζ.

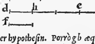
Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Theorema 6, Propositio 6.

SI duæ magnitudines, duarum magnitudinum æque fuerint multiplices, & ablatæ aliquæ, earũ æque fuerint multiplices: & reliquæ eisdem vel æquales sunt, vel æque ipsarũ multiplices.

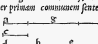
ORONTIVS. ¶ *Sit a b magnitudo tam multiplex ipsius c, quàm multiplex est d e ipsius f: æquè insuper multiplex esto ablata a g eiusdem c, ut ablata b e ipsius f. Aio quòd reliquæ g b & d h, ipsis c & f aut sunt æquales altera alteri: uel earundem c et f æquè multiplices.*

Prima theorematis differentia.



Esto primùm, ut g b sit æqualis ipsi c: dico quòd et b g, ipsi f est æqualis. Detur enim e k ipsi f æqualis. Cùm igitur a g æquè multiplex si ipsius c, ut h e ipsius f, per hypothesin. Porrò g b æqualis est ipsi c per hypothesin: et e k ipsi f, per constructionem. Et æquè igitur multiplex est a b ipsius c, et h k ipsius f. Ponitur autem ex hypothesi, a b æquè multiplex ipsius c, ut d e ipsius f. Et utraque igitur d e et b k, æque est multiplex ipsius f: nempe ut a b ipsius c. Quæ autem eiusdẽ sunt æquè multiplicia, æqualia sunt adinuicem, per sextæ communis sententiæ interpretationem. Aequalis est ergo d e ipsi b k, et utrique communis b e: ea itaque dempta, reliqua d b reliquæ e k erit per tertiam communem sententiam æqualis. Eidẽ porrò e k, æqualis est per constructionẽ ipsa f magnitudo. Binæ igitur magnitudines d b et f, eidem e k sunt æquales: et proinde æquales adinuicẽ, per primam communem sententiam. si reliqua igitur g b, sit æqualis ipsi c: et reliqua d b, ipsi f erit æqualis. ¶ *Quòd si g b fuerit multiplex ipsius c: aio respondenter d b, æquè multiplicem fore ipsius f.*

Secunda theorematis differentia.



Quotuplex est enim g b ipsius c, totuplex assumatur e k ipsius f. Et quoniam per hypothesin, a g prima secundæ c æquè est multiplex, ac tertia b e quartæ f: quinta rursum g b eiusdem secundæ c tam multiplex est per constructionem, quàm multiplex est sexta e k eiusdẽ quartæ f. Et composita igitur prima & quinta a b, eiusdem secundæ c æquè erit multiplex, ac tertia et sexta b k ipsius quartæ f, per secundam huius quinti. Quotuplex est autem a b ipsius c, totuplex data est d e ipsius f, per hypothesin. Et utraque igitur d e et b k, æquè est multiplex ipsius f, ut a b ipsius c. Hinc per sextam communem sententiam, æqualis rursum est d e ipsi k, et utriq; communis b e: qua subtracta, reliqua d h reliquæ e k, per ipsam tertiã communẽ sententiam, est æqualis. Aequalia porrò eiusdẽ sunt æquè multiplicia, per ipsius sextæ

communis

communis sententiæ conuersionem. Et d higitur et e k, eiusdem f æquè multipli cia sint. At e k ipsius f tam multiplex est per constructionem, quàm multiplex est g b ipsius c. Et reliqua igitur d h æque est multiplex ipsius f, quotuplex est reliqua g b ipsius c. Hæc autem omnia subsequens numerorum, ad faciliorem demonstrationis intelligentiam adiuncta corroborat formula.

Exemplũ in numeris.

Prima.	secun.	tert.	quar.	Ablata.	reliqua.	Ablata.	reliqua.	Magnitudines da.
a b	c	d e	f	a g	g b	h e	d h	
12	3	8	2	9	3	6	2	vt 1 1 h.
12	3	8	2	6	6	4	4	vt 1 2 h.

si duæ itaque magnitudines: et quæ sequuntur reliqua. Quod fuerat ostendendũ.

Θεώρημα ξ, Πρόθεσις ξ.

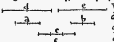
Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Theorema 7, Propositio 7.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad æquales.

ORONTIVS. Sint binæ & inuicem æquales magnitudines a & b, ad aliam quandam magnitudinem relatæ, utpote c. Dico primùm, a & b ad eandem c eandem habere rationem. Assumantur enim ipsarum a & b, æquè multiplices d & e: ipsius autem c, alia utcunque multiplex f. Cùm igitur æquè multiplex sit d ipsius a, ut e ipsius b, & per hypothesin a & b magnitudines sint adinuicem æquales: erit & d æqualis ipsi e: quæ enim eiusdem uel æqualium sunt æquè multiplicia, æqualia sunt adinuicem, per sextam communem sententiam. Atqui f magnitudo, binas ipsius c repræsentans æquè multiplices, sibimet æqualis est.

Prima theorematis pars.



Vt se habet igitur d multiplex ad f, ita e ad eã dem f: nam quæ sunt æqualia, eiusdem sunt æquè multiplicia, aut submultiplicia, per sextæ aut septimæ communis sententiæ cõuersionem. Est autem a prima magnitudo, c secunda, b tertia, & c. rursum in ordine quarta: súntque d & e ipsarum a & b æquè multiplicia, primæ inquam & tertiæ magnitudinis: f porrò bis repetita, ipsius c bis repetendæ, hoc est, secundæ & quartæ alia utcunque multiplex. Præostensum est insuper, d multiplex primæ ad f multiplex secundæ ita se habere, ut e multiplex tertiæ ad ipsum f multiplex quartæ. Est igitur per sextam huius quinti diffinitionem, ut a ad c, ita b ad eandem c. Aequales igitur magnitudines a & b, ad eandem magnitudinem c, eandem habent rationem. Aio quoque, eandem magnitudinem c, ad a & b inuicem æquales magnitudines, eandem uersa uice obseruare rationem. Hoc autem conuersò licebit ordine concludere. Ostendemus eni (ueluti supra) d & e multiplices, fore rursum inuicem æquales: & f bis coassũpta, geminas æquè multiplices repræsentare non denegabitur. Et proinde f ad d ita se habere concludetur, ut e ad eandem f: hinc per assumptum, siue lemma

Pars secunda theorematis.

V. quartæ

quartæ propositionis huius quinti, f ad d se habebit, ut eadem f ad e. Est autem f primæ et tertiæ magnitudinis, hoc est, ipsius c bis repetendæ æque multiplex: d uerò et e secundæ et quartæ, utpote ipsarum a et b æquè multiplices. Est igitur ut c ad a, sic eadem c ad b, per eandem sextam huius quinti diffinitionem. ¶ Idẽ quoque à conuersa ratione, per quartæ propositionis huius quinti corollarium, leuius concludere licebit. Si quatuor enim magnitudines fuerint proportionales, et è contra proportionales erunt. Atqui ostensum est a ad c eandem habere rationem, quam b ad eandem c: et è contra igitur, ut c ad a, ita eadem c ad b. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: et eadem ad æquales. Quod oportuit ostendisse.

Idem aliter.

Θεώρημα η, Πρότασις η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον: καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

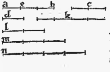
Theorema 8, Propositio 8

IN æqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem maiorẽ rationem habet, quàm ad maiorem. 8

ORONTIVS. ¶ Sint binæ magnitudines æquales, a b quidem maior, et c minor: d autem alia quædam magnitudo. Aio primum, quòd a b ad d maiorem rationem habet, quàm c ad ipsam d. Cùm enim ex hypothesi a b sit maior magnitudine c: comprehendet itaque a b magnitudo eandem c, & aliquam insuper magnitudinem. Sit igitur e b æqualis ipsi c, & a e residua eiusdem magnitudinis pars. Erunt ergo a e & e b aut inæquales, aut æquales adinuicem. Sint primùm inæquales, & a e minor ipsa e b. Suscipiatur autem ipsius minoris a e utcunque multiplex, maius tamen ipsa magnitudine d: sitque illud f g. Quàm multiplex insuper est f g ipsius a e: tam multiplex detur g h ipsius e b, & k ipsius c. Suscipiatur rursum duplum ipsius d, utpote l: postea triplum, sitque illud m. Et deinceps ita, uno semper adiuncto: quatenus resultet multiplex ipsius d, proximo maius ipso g h, id est, quod inter multiplicia ipsius d, per continuam simplicis additionem consurgentia, primò incipiat excedere g h: sitque illud n, quadruplum ipsius d. Erit ergo g h multiplex, proximò minus ipso n: & proinde non minus ipso m: hoc est, aut illi æquale, aut eo maius. ¶ His ita constructis, quoniã æquè multiplex est f g ipsius a e, ut g h ipsius e b: quotuplex igitur est f g ipsius a e, totuplex est f h ipsius a b, per primam huius quinti. Sed quotuplex est f g ipsius a e, totuplex est k ipsius c. Et f h igitur tam multiplex est ipsius a b, quàm multiplex est k, ipsius c: nempe ut f g ipsius a e. Insuper quoniam æquè multiplex est g h ipsius e b, ut k ipsius c: & e b ipsi

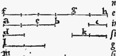
Primæ partis differẽtia.

Demonstratio eiusdem primę differẽtiæ.



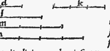
ipsi.c per constructionem est æqualis.quæ autem æqualium sunt æquè multiplicia,æqualia sunt adinuicem,per sextam communem sententiam. Aequalis est igitur g h ipsi k. Verùm g h ipso m non est minor,uti nuper ostensum est, & f g data est maior ipsa d:tota igitur f h,binis d & m erit maior. Sunt autem d & m ipsi n æquales:est enim n quadruplum ipsius d,& m triplum, unà cum ipso d efficiens quadruplum. Et f h igitur ipso n maius est: nam idem, æqualium est æque maius. Porrò k ipsi g h æqualis ostensa est: & k igitur minor est ipsa n. Atqui f h & k, ipsarum a b & c, primæ inquam & tertiæ magnitudinis sunt æquè multiplicia:n uerò utcunque multiplex ipsius d,secundam & quartam magnitudinem repræsentantis:& multiplex primæ excedit multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedit multiplex quartæ. Prima igitur a b ad secundam d maiorem rationem habet,quàm tertia c ad quartam d:per octauam diffinitionem huius quinti. ¶Quòd si a e fuerit maior e b,multiplicetur iam ipsa e b minor, quatenus insurgat multiplex maius ipsa d magnitudine: sitque illud g h. Quàm multiplex insuper est g h ipsius e b:tam multiplex accipiatur f g ipsius a e,& k rursum ipsius c. Subsumatur præterea multiplex ipsius d, proximò maius ipso f g:sitque rursum n,quadruplum ipsius d. Haud dissimiliter ostendemus,totam f h ipsius a b fore totuplicẽ,quotuplex est g h ipsius e b:& demum f h & k,ipsarum a b & c æque itidem fore multiplices:item g h æquari ipsi k. Et quoniam n multiplex,proximò maius est f g,nõ est igitur f g,minus ipso m. At qui g h maius est ipso d,per constructionẽ:totũ igitur f h,ipsis d et m maius est,et maius consequẽter ipso n. Porrò k nõ excedit ipsũ n:est enim k, ipsi g h æquale,qtã multiplex est ipsius minoris e b,quã multiplex est f g ipsius maioris a e.q; autẽ inæqualiũ sunt æquè multiplicia,sũt respõdenter inæqualia. Et k igitur,minus est ipso f g:& ipso n ꝑpterea lõge minus. Rursum itaq; multiplex primi excedit multiplex secundi,at multiplex tertij, non excedit multiplex quarti. Per ipsam igitur octauam huius quinti diffinitionem,primum a b ad secũdum d maiorem rationem habet,quàm tertium c ad quartum d. ¶Porrò cum a e,fuerit æqualis ipsi e b:utraque erit æqualis ipsi c. Cuiuslibet itaque ipsarum trium magnitudinum,sumenda sunt æquè multiplicia,ipso d maiora:f g quidem ipsius a e,& g h ipsius e b, & k rursum ipsius c.quæ per sextam cõmunem sententiam,erunt adinuicem æqualia. Item n multiplex ipsius d, quod illorum quolibet proximò maius existat: utpote,triplum ipsius d. Quibus constructis,ostendentur rursum f h & k, ipsarum a b & c fore æquè multiplicia:& f h multiplex primæ magnitudinis, excedere ipsum n multiplex secundæ: k autem multiplex tertiæ, non excedere multiplex quartæ. Hinc priori deductione colligemus,a b ad d maiorem habere rationem,quàm c ad ipsam d.

Eiusdem primæ partis differentia secũda.



Ostensionis resolutio.

Tertia eiusdem primæ partis differẽtia.



Pars secunda principalis theorematis.

¶ Dico insuper, quòd eandem magnitudo d, ad minorem c maiorem rationem, habet, quàm ad maiorem a b. Hoc autem ex suprascripto discursu, immutato magnitudinum & æquè multiplicium ordine, haud obscure colligemus. Cùm enim omnibus modis præostensũ sit, f b excedere ipsũ n, & k ab eodẽ n superari: & conuersim igitur, n excedit k, non excedit autem f b. Porrò n est multiplex ipsius d, hoc est primæ & tertiæ magnitudinis k autem, multiplex secũdæ, utpote c: & f b æquè multiplex quartæ, scilicet a b. Multiplex insuper primæ, excedit multiplex secundæ: at multiplex tertiæ, non excedit multiplex quartæ. Per octauam ergo diffinitionem huius quinti, prima d, ad secundã c maiorem rationem habet, quam tertia d, ad quartam a b. Ergo d, ad minorem c maiorem rationem habet, quàm ad maiorem a b. Inæqualium igitur magnitudinum: &c. ut in theoremate. Quod ostendere oportebat.

Θεώρημα θ, Πρόθεσις θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸν τὸ αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

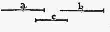
Theorema 9, Propositio 9.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales inuicem sunt: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsæ sunt æquales. 9

Primæ partis ostensio ab impossibili.

ORONTIVS. ¶ Hic in uniuersum ostendendum proponitur, quod prima, sexta, atque septima communi sententia, & illarum conuersione, in rationem assumpseramus principij. Vtpote, quòd ea quæ eidem æqualia, uel eiusdem sunt æquè maiora, uel æque minora: sunt adinuicem æqualia, & è diuerso. Sint ergo datæ magnitudines a & b, ad eandem magnitudinem c eandem rationem obtinentes. Aio quòd æqualis est a, ipsi b. Nam si a & b magnitudines, forent inæquales: maior ad eandem c maiorem rationem haberet, quàm minor, per primam partẽ antecedentis octauæ propositionis huius quinti. Habet autem utraque ipsarum a & b eandem rationem ad ipsam c, per hypothesin. Haberent igitur a & b, eandem, atque diuersam rationem ad eandem c: quod est impossibile. Aequalis est itaque a, ipsi b.

Pars secunda theorematis.



¶ Quòd si c ad easdem a & b eãdem habuerit rationem: dico rursum, quòd a et b æquales sunt adinuicem. Si enim forent inæquales: eadem c ad ipsas a & b magnitudines eandem non haberet rationem: ad minorem enim maiorem rationem obtineret, quàm ad maiorem, per secundã partem eiusdem octauæ propositionis. Supponitur autem, eadem c ad ipsas a & b eandem habere rationem. Eadem itaque magnitudo c, ad ipsas a & b magnitudines, eandem simul atque diuersam rationem haberet. Quòd uidetur absurdum. Aequalis est igitur a ipsi b. Quod susceperamus ostendendum. Idem quoque respondenter ostendetur: ubi plures duabus ad eandem, uel eadem ad plures eandem rationem habuerint.

Θεώρημα ι, Πρόθεσις ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο

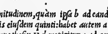
ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι: πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Theorema 10, Propositio 10.

AD eandem rationem habentium, maiorem rationem habens, illa maior est: ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

ORONTIVS. ¶Sint rursum a & b magnitudines ad eandem magnitudinem c comparatæ: habeátque a ad c maiorem rationem, quàm b ad eandem c. Dico quòd a, ipsa b maior est. Quoniam si non fuerit maior: uel erit æqualis ipsi b, uel eadem minor. Aequalis porrò non est a ipsi b: haberent enim a & b eandem rationem ad c magnitudinem, per primam partem septimæ propositionis huius quinti, quod aduersatur hypothesi. Non est igitur a, æqualis ipsi b. Haud dissimiliter ostendetur, quòd neque minor est a ipsa b: quoniam a magnitudo, minorem rationem haberet ad c magnitudinem, quàm ipsa b ad eandem c, per primam partem octauæ propositionis eiusdem quinti: habet autem a maiorem rationem, quàm b ad eandem c per hypothesin. Haberet igitur a ad c maiorem & minorem rationem quàm b ad ipsam c. Quod non est possibile. Itaque a non est minor b: neque eidem (uti nunc ostendimus) æqualis. Et a igitur, ipsa b maior est. ¶Quòd si eadem magnitudo c, maiorem rationem habuerit ad b, quàm ad a: dico rursùm, a fore maiorem ipsa b. Non erit enim a ipsi b æqualis: quoniam c ad a eandem rationem haberet, quã ad b, per secundam partem præallegatæ septimæ propositionis. Habet autem c, minorem rationem ad a, quàm ad b, ex hypothesi: quæ simul stare non possunt. Non est igitur a, ipsi b æqualis Neque etiam minor: tunc enim c, ad ipsam a maiorem rationem haberet, quàm ad b, per secundam partem ipsius octauæ propositionis huius quinti. Habet autem c minorem rationem ad a, quàm ad b, ex ipsa hypothesi. Haberet itaque c, minorem simul atque maiorem rationem ad a, quam ad b: quod uidetur impossibile. Igitur a non est minor ipsa b: ostensum est, quòd nec eidem æqualis. Maior est itaque rursùm a ipsa b. Ad eandem ergo rationem habentium: & quæ sequuntur reliqua. Quod oportuit demonstrasse.

Prima theorematis pars.



Partis secũdæ demõstratio.

Θεώρημα ια, Πρόθεσις ια.

ΟΙ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

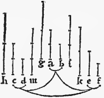
Theorema 11, Propositio 11.

11 QVæ eidem sunt eædem rationes, & adiuicem sunt eædẽ.

ORONTIVS. ¶Sint eidem rationi quæ a ad b, eædem rationes quæ c ad d, & e ad f. Aio quòd rationes c ad d & e ad f, sunt eædem adinuicem: sicut quidem c ad d, sic e ad f. Accipiantur enim ipsarum antecedentium a, c, e, æquè multiplicia g, h, k: ipsarum autem consequentium b, d, f, alia quæuis æquè multiplicia l, m, n. Cùm igitur ex hypothesi a ad b eandem habeat rationem, quàm c ad d,

Discursus æquè multiplicium.

& ipsarum a & c, primæ inquàm & tertiæ magnitudinis, sumpta sint æquè multiplicia g,h, secundæ rursum & quartæ, utpote ipsarum b & d alia itidem æquè multiplicia l,m: & æquè multiplicia igitur g,h, ad æquè multiplicia l,m, eandem habent rationem sumpta adinuicem, per quartam huius quinti. Itaque si g excedit l, & h proportionaliter excedit m: & si æquale, æquale: si autem minus, itidem proportionaliter minus. Insuper quoniam per ipsam hypothesin, sicut a ad b, ita e ad f: & ipsarum a & b, primæ videlicet & tertiæ magnitudinis, sumpta sunt æquè multiplicia g,k, secundæ rursum & quartæ, utpote ipsarum b & f, alia utcunque æquè multiplicia l,n. Si itaque g excedit l, & k proportionaliter excedit n: & si æquale, æquale: si uero minus, itidē proportionaliter minus, per eandem quartam huius quinti propositionem. Atqui præostensum est, quòd si g excedit l, excedit & h ipsum m: & si æquale, æquale: si autē minus, & h proportionaliter minus est ipso m. Quapropter si h excedit m, & k proportionaliter ipsum n: & si h æquatur ipsi m, coæquatur & k ipsi n: & si minus fuerit h ipso m, & k denum proportionaliter minus est ipso n. Porrò h & k ipsarum c & e, primæ uidelicet & tertiæ magnitudinis data sunt æquè multiplicia: ipsarum autem d & f, hoc est secundæ & quartæ, alia utcunque æquè multiplicia m & n. Est igitur per sextam huius quinti diffinitionem, sicut c ad d, ita e ad f. Quæ eidem itaque sunt eædem rationes, et adinuicem sunt eædē. Quod fuerat ostendendum.



Θεώρημα ιβ. Πρόθεσις ιβ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

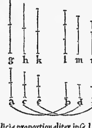
Theorema 12. Propositio 12.

Si fuerint quælibet magnitudines proportionem habentes: erit sicut vna antecedetium ad vnam consequentiū, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes. 12

ORONTIUS. Quod in prima huius quinti propositione, de ratione tantùm præostensum est multiplici: hic de sub quacunque ratione proportionatis magnitudinibus, uniuersaliter proponit Euclides. Sint itaque a,b,c,d,e,f quotlibet magnitudines inuicem proportionales: sicut quidem a ad b, ita c ad d, sicutque c ad d, sic e ad f. Aio quod quam rationem habet a ad b, eam habet et composita a c e, ad coniunctas b d f. Suscipiantur enim ipsarum antecedentium a c e, æquè multiplicia g,h,k: et ipsarum consequentium b,d,f, alia quæuis æquè multiplicia l,m,n. Cùm sit igitur ut a ad b, sic c ad d, et ipsarum a et c æquè multiplicia sunt g,h, ipsarum uero b,d, alia itidem æquè multiplicia l,m: sicut se habet igitur g ad l, sic h ad ipsum m, per quartam huius quinti. Rursum quoniam est ut c ad d, sic e ad f, et ipsarum c et e æque multiplicia sunt h,k, ipsarū autem d,f, alia utcunq; æquè

Quatuor æque multiplicium inuicē proportionalium, inferendarum magnitudinum, subtilis adinuentio.

æquè multiplicia m,n:sicut se habet igitur h multiplex ad ipsum m, ut k ad ipsum n, per eandem quartam ipsius quinti. Vt autem se habet h ad m, sic g ad l se habere præ ostensum est. Est igitur ut g ad l, sic k ad n, per antecedentem undecimam propositionem. sũt itaque g,h,k, & l,m,n, multiplicia, inuicẽ proportionalia: sicut quidem g ad l, sic h ad m, & k ad n. Igitur si g multiplex excedit l, excedit & h proportionaliter ipsum m, necnon & k ipsum n: & si g æquatur ipsi l, æquum est & h ipsi m, et k respondent. ipsi n: si autem g minus fuerit ipso l, est et h proportionaliter minus ipso m, et k demum ipso n. Et proinde si g multiplex excedit l, excedunt et g,h,k multiplicia proportionaliter ipsa l,m,n: et si æquum est g ipsi l, æqualia sunt et g,h, k ipsis l,m,n: si autem g sit minus ipso l, erunt et eadem g,h,k, eisdem l,m,n, tandẽ æque minora, per secundam et quartam communem sententiam. Atqui g,h,k magnitudines, ipsarum a,c,e magnitudinum sunt per constructionem singulæ singularum æque multiplices: quotuplex igitur est unius una magnitudo, hoc est g ipsius a, totuplices sunt et omnes g h k, omniũ a c e, per primam eiusdem quinti. Et proinde quotuplex est l ipsius b, totuplices sunt l m n ipsarum b d f. sunt itaque g et g h k, ipsarum a et a c e, hoc est, primæ et tertiæ magnitudinis æque multiplicia: l autem n et l m, secundæ b et tertiæ b d f, æque itidem multiplicia. Et ostensum est, quòd si g multiplex excedit l, excedit et g h k proportionaliter ipsum l m n: et si æquale, æquale: si uerò minus. itidem proportionaliter minus. Est igitur per sextam huius quinti diffinitionem, sicut a ad b, sic a c e composita ad b d f compositam: hoc est, sicut una, antecedentium ad unam consequentium, sic omnes antecedentes, ad omnes consequentes. Quod demonstrandum susceperamus. In quorum omnium rationalem confirmationem, subiectam contemplare numerorum formulam.



g.	l.	g,h,k.	l,m,n
a.	b.	a,c,e.	b,d,f.
prima.	secunda.	tertia.	quarta.

Summaria theorematis ostensio.

	Dupli.			sesquialter.			superbipartientes			dupli sesquialteri.			dupli superbiptientes.	
mul	2	1	super	3	2	super	5	3	multi.	5	2	mul	8	3
ipl.	4	2	part.	6	4	partiẽ.	10	6	super.	10	4	super.	16	6
	6	3		9	6		15	9		15	6		24	9
cõp.	12	6	cõp.	18	12	comp.	30	18	comp.	30	12	comp.	48	18

Θεώρημα ιδ, Πρόθεσις ιδ.

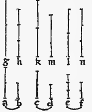
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον: καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτος πρὸς ἕκτον.

Theorema 13, Propositio 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quàm quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

ORONTIVS. ℭ *Habeat enim prima magnitudo a ad secundam b eandem rationem, quàm tertia c ad quartam d: ipsa porrò tertia c ad eandem quartam d maiorem rationem habeat, quàm e quinta ad f sextam magnitudinem. Aio quòd & a prima magnitudo ad secundam b maiorem itidem rationem habebit, quam ipsa e quinta ad eandem sextam f. Multiplicetur enim utraque ipsarum a, b: sintque earundem a, b, utcunque multiplicia g, h, sed g maius ipso h: potest enim a toties multiplicari, quousque multiplex ipsius a superet multiplex eiusdem b. Quàm multiplex insuper est g ipsius a, tam multiplex detur k ipsius c, & l ipsius e. Rursum quàm multiplex est h ipsius b, tam multiplex esto m ipsius d, & n ipsius f.*

Discursus multiplicium ad theorematis illationem nos perducentium.



Cùm igitur a ad b eandem rationem habeat, quam c ad d, sintque g & k primæ & tertiæ æquè multiplicia, h autem & m secundæ & quartæ æquè itidem multiplicia: si g itaque excedit h, excedit & k ipsum m, per quartam huius quinti. Atqui g superat h, per constructionem: & k igitur superat m. Rursum quoniam c ad d maiorem rationem habet, quàm e ad f, & ipsarū c & e primæ inquàm & tertiæ magnitudinis, æquè multiplicia sunt k, l, secundæ porrò d & quartæ f alia utcunque æquè multiplicia m, n: si k igitur excedit m, non excedit l ipsum n, per conuersionem octauæ diffinitionis eiusdem quinti. Porrò k (uti nunc ostensum est) excedit m: & l igitur non excedit n. Excedit autem & g ipsum h, súntque g & l ipsarum a et e, hoc est, primæ et tertiæ magnitudinis æquè multiplicia, per constructionem: h rursum et n ipsarum b et f, utpote, secundæ et quartæ alia utcunque æquè multiplicia: et g multiplex primæ excedit multiplex secundæ, l autem multiplex tertiæ non excedit n multiplex quartæ. Prima igitur a, ad secundam b maiorem rationem habet, quàm e tertia ad quartam f, per octauam huius quinti diffinitionem. Ergo si prima ad secundam eandem rationem habuerit: et cætera, ut in theoremate.

Quod oportuit ostendisse.

Θεώρημα ιδ', Πρότασις ιδ'.

ΕΑν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον κἂν ἔλασσον ἔλασσον.

Theorema

Theorema 14, Propositio 12.

14 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: prima verò tertia maior fuerit, & ſecunda quarta maior erit: etſi æqualis, æqualis: etſi minor, minor

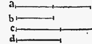
ORONTIVS. ¶Sint uerbi gratia quatuor magnitudines a, b, c, d, inuicem proportionales: ſicut quidem a ad b, ita c ad d. ſit autem primum a, maior ipſa c: dico quòd & b, ipſa d reſpondenter eſt maior. Cùm enim ex hypotheſi a ſit maior c: habebit igitur a ad b maiorem rationem, quàm c ad eandem b, per octauam huius quinti. Eſt autem ratio a ad b, eadẽ quæ c ad d, per hypotheſin: & c igitur ad d maiorem rationem habet, quàm eadem c ad b. Ad quam autem eadem maiorẽ rationẽ habet: & illa minor eſt, per ſecundã partem decimæ propoſitionis huius quinti. Minor eſt itaque d, ipſa b: & b propterea ipſa d maior.

Quando prima maior eſt tertia.



¶Quòd ſi a fuerit minor c: erit & b minor ipſa d magnitudine. Rurſum enim per eandem octauam huius quinti, c maior ad ipſam b maiorem rationem habebit, quàm a minor ad eandem b. Quam rationem porrò habet a ad b, eam ſeruat ex hypotheſi c ad d. Et c igitur ad b, maiorem rationem habet, quàm ad d. Eſt igitur b minor ipſa d, per ipſam decimam huius quinti.

Quando prima minor eſt tertia.



¶Porrò ſi a fuerit æqualis ipſi b: haud diſſimiliter oſtendemus, b fore æqualem ipſi d. Aequales enim a & c ad eandem b eãdem rationem habebunt, per ſeptimã huius quinti. Sed quam rationem habet a ad b, eam rurſum habet c ad d, per hypotheſin. Et c igitur ad utranque b & d, eandem obſeruabit rationem. Ad quas autem eadem eandem habet rationem, ipſæ ſunt æquales, per nonam huius quinti propoſitionem. Aequalis erit igitur b ipſi d. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, & quæ ſequuntur reliqua. Quod demonſtrare oportebat.

Vbi prima æquatur tertiæ

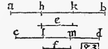
Θεώρημα ιε, Πρόθεσις. ιε.

ΤΑ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Theorema 15, Propoſitio 15.

15 PArtes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent ſumptæ adinuicem.

ORONTIVS. ¶Sint a b & c d, ipſarum e & f, æquè multiplices. Aio partem e ad partẽ f eandem rationem habere, quam a b multiplex ad c d multiplicẽ. Cũ enim a b æquè multiplex ſit ipſius e, ut c d ipſius f: quot igitur partes ſunt in a b æquales ipſi e, tot ſunt & in c d æquales ipſi f. Sint exempli gratia iuxta numerum g: & diſtingatur a b in partes æquales ipſi e, ſintque a h, h k, & k b: necnõ & c d in partes æquales ipſi f, utpote in e



83

l, l m & m d. Erit itaque multitudo ipsarum a b, h k, & k b, multitudini c l, l m, & m d æqualis: utraq; enim æqualis ipsi numero g. Rursum quoniã a b, h k, & k b, eidem e sunt æquales: sunt igitur æquales adinuicem, per primam communem sententiam. & proinde c l, l m, & m d, sunt quoque adinuicẽ æquales. Aequales porrò ad eandẽ eãdẽ habent rationẽ, & eadẽ ad æquales: per septimam huius quinti. Est igitur ut a h ad c l, sic h k ad l m, & k b ad m d. Proportionales igitur sunt ipsæ a h, h k, & k b, ipsis c l, & l m, m d. Et sicut igitur una antecedentium ad unam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes, per duodecimã ipsius quinti. Ergo sicut a h ad c l, sic tota a b ad totã c d. æqualis porrò est a h ipsi e, & c m ipsi f: & æquales ad easdẽ, eandem habẽt rationem, per ipsam huius quinti septimam. Et sicut igitur a b multiplex ad c d multiplicem: sic pars e, ad partem f. Partes itaque eodem modo multipliciũ, eandem rationem habent sumptæ adinuicem. Quod ostendendum fuerat.

Θεώρημα ις, Πρόθεσις, ις.

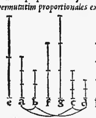
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσαι.

Theorema 16, Propositio 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatim proportionales erunt. 16

ORONTIVS. Sint uerbi gratia quatuor magnitudines a, b, c, d, inuicem proportionales: sicut a ad b, sic c ad d. Dico quòd & uicissim, hoc est, permutatim proportionales existunt: sicut quidem a ad c, sic b ad d. Accipiãtur enim ipsarum a, b, æquè multiplices e, f: ipsarum quoque c, d, aliæ utcunque æquè multiplices g, h. Cùm igitur æquè multiplex sit e ipsius a, ut f ipsius b: erit ut a ad b, sic e ad f: nam partes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem, per antecedentem decimamquintam propositionem. Vt autem a ad b, sic se habet c ad d, per hypothesin. Et sicut igitur e ad f, sic c ad d: nam quæ eidem sunt eædem rationis, & adinuicem sunt eædem, per undecimam huius quinti. Insuper, quoniã æquè multiplex est g ipsius c, ut h ipsius d: erit rursum ut c ad d, sic g ad h, per eandem quindecimam huius quinti. Sicut porrò c ad d, sic e ad f se habere præostẽsum est: & sicut igitur e ad f, sic g ad h, per ipsam undecimam ipsius quinti. Quatuor itaque magnitudines e, f, g, h, sunt inuicem proportionales: habétque prima e ad secundã f eã rationem, quam tertia g ad quartam h. Si prima igitur e fuerit maior tertia g, & secunda f, ipsa h quarta maior erit: et si æqualis, æqualis: & si minor, minor, per decimamquartam eiusdem quinti. Atqui e & f, ipsarum

Permutatæ seu reciprocæ rationis demõstratio.



ipſarum a & b, hoc eſt primæ & tertiæ magnitudinis (de illationis ordine uelim intelligas) ſunt æque multiplices: g autem & h, ſecundæ & quartæ, utpote ipſarum c & d æque rurſum multiplices. Eſt igitur per ſextam huius quinti diffinitionem, ut prima a ad ſecundam c, ſic tertia b ad quartam d. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & permutatim ſeu uiciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

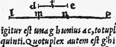
Θεώρημα ιζ, Πρόθεσις ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. Theorema 17, Propoſitio 17

17 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, diuiſæ quoque proportionales erunt.

ORONTIVS. ¶Sint compoſitæ magnitudines a b, b c, d e, & e f, inuicem proportionales: ſicut a b ad b c, ſic d e ad e f. Aio quòd & diuiſæ proportionales erunt: ſicut quidem a c ad c b, ſic d f ad f e. Accipiantur enim ipſarum a c, c b, d f, & f e, æquè multiplices g h, h k, l m, & m n: ipſarum rurſum b c, e f, aliæ itidem æquè multiplices k o, & n p.

Diuiſa ratio, ſiue modus arguendi à cõpoſitis ad diuiſa.



His ita conſtructis, quoniam g h & h k magnitudines, ipſarũ a c & c b magnitudinum æqualium numero ſingulæ ſingularũ, per cõſtructionẽ, ſunt æquè multiplices: quotuplex igitur eſt una g h unius a c, totuplex eſt & tota g k totius a b, per primã huius quinti. Quotuplex autem eſt g h ipſius a c, totuplex eſt l m, ipſius d f, per conſtructionem: quàm multiplex eſt igitur g k ipſius a b, tam multiplex eſt l m ipſius d f, per undecimam ipſius quinti. Rurſum quoniam l m & m n, ipſarum d f & f e æqualium numero ſingulæ ſingularũ æque ſunt multiplices, per ipſam conſtructionẽ: quotuplex igitur eſt una l m unius d f, totuplex eſt tota l n totius d e, per eandem primã huius quinti. Quotuplex autẽ eſt l m ipſius d f, totuplicẽ oſtendimus g k ipſius a b: quotuplex eſt igitur g k ipſius a b, totuplex eſt l n, ipſius d e, per ipſam undecimam eiuſdem quinti. Sunt itaque g k & l, n, ipſarum a b & d e æquè multiplices. Itẽ quoniã æquè multiplex eſt h k ipſius b c, ut m n ipſius e f: quinta rurſum k o, eiuſdem b c æquè multiplex eſt, ut ſixta n p eiuſdem e f. Et compoſita igitur h o, eiuſdem b c, æquè erit multiplex, ac tota m p eiuſdem e f, per ſecundam huius quinti. Et proinde h o & m p, ipſarum b c & e f ſunt æque multiplices. Inſuper quoniam ex hypotheſi, ſicut a b, ad b c, ſic d e ad e f: & ipſarum a b & d e, primæ inquam & tertiæ, æque multiplices ſunt g k & l n: ipſarum rurſum b c & e f, hoc eſt ſecundæ & quartæ, æque itidem multiplices h o & p. Eſt igitur ut g k ad h o, ſic l n ad m p, per quartam huius quinti. Auferantur utriſque communes h k, & m n: ut reliqua igitur g h ad reliquam k o, ſic l m reliqua ad reliquam n p, per tertiam & quintã

g k.	g h.	l m.
a b.	a c.	d f.

g k.	l m.	l n.
a b.	d f.	d e.

g k.	h o.	l n.	m p.
a b.	b c.	d e.	e f.

communem ſententiam. Si enim ab æquè multiplicibus, æquè multiplicia auferantur, relinquentur æque multiplicia. Igitur ſi g h excedit k o, excedit & l m proportionaliter ipſam n p: etſi æqualis, æqualis: ſi autem minor, itidem proportionaliter minor. Atqui g h & l m, primæ & tertiæ magnitudinis (iuxta ordinem illationis) hoc eſt, ipſarum a c, & d f datæ ſunt æque multiplices: k o uerò & n p, ipſarum c b & f e, ſecundæ inquam & quartæ magnitudinis æquè itidem multiplices. Prima igitur a c, ad ſecundam c b eam rationem habet: quam tertia d f, ad quartam f e, per ſextam huius quinti diffinitionem. Si compoſitæ itaque magnitudines proportionales fuerint, diuiſæ quoque proportionales erunt. Quod ſuſceperamus oſtendendum.

g h.	k p.	l m.	n p.
a c.	c b.	d f.	f e.

Θεώρημα ιη, Πρόθεσις ιη.

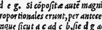
Εὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Theorema 18, Propoſitio 18.

SI diuiſæ magnitudines proportionales fuerint: compoſitæ quoque proportionales erunt. 18

ORONTIVS. ¶ Sint diuiſæ magnitudines a e, c b, d f, & f e, inuicē proportionales: ſicut a c ad c b, ſic d f, ad f e. Aio quòd & compoſitæ, erunt uerſa uice proportionales: ſicut quidem a b ad b c, ſic d e ad e f. Sicut enim a b ad b e, ſic d e ad aliam quandam magnitudinem ſe habere neceſſum eſt. Hæc autem magnitudo, ſi non fuerit e f, erit uel ipſa e f maior, aut eadem minor. Eſto primùm a b ad b e, ſicut d e ad maiorē (ſi poſſibile fuerit) ipſa e f: utpote ad e g. Erit igitur ſicut a b ad b e, ſic d e ad e g. Si cōpoſitæ autē magnitudines proportionales fuerint: diuiſæ quoque proportionales erunt, per antecedentem decimamſeptimam propoſitionem. Erit itaque ſicut a c ad c b, ſic d g ad g e. Sicut porro a e ad e b, ſic per hypotheſin d f ad f e. Ergo ſicut d f ad f e, ſic d g ad g e: nam quæ eidem ſunt eædem rationes, adinuicem ſunt eædem, per undecimam huius quinti. Quatuor itaque magnitudines d f, f e, d g, atque g e, ſunt inuicem proportionales, & prima d f, maior eſt tertia d g: & ſecunda igitur f e, maior erit quarta g e, per decimamquartam huius quinti. Atqui f e, minor eſt ipſa g e, per hypotheſin. Erit itaq; f e, minor ſimul & maior eadē g e magnitudine: quod eſt impoſſibile. Nō eſt igitur ſicut a b ad b c, ſic d e ad maiorē ipſa e f. ¶ Aio rurſum, quòd neque ad minorem ipſa e f: utpote e h. Concludemus enim iterū ex decimaſeptima & undecima huius quinti, fore ſicut d f ad f e, ſic d h, ad h e: utrobique enim ſicut a e ad e b. Et quoniam prima d f, minor eſt tertia d h: erit rurſum per ipſam decimamquartam huius quinti, ſecunda f e, minor quarta h e. Supponitur autē maior: quæ ſimul

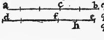
Cōpoſita ratio, ſiue arguendi modus à diuiſis ad cōiuncta.



d f.	a e.	d g.
f e.	e b.	g e.

Prima oſtenſionis differētia.

Secūda pars ſiue differentia.



nui, stare nõ possunt. Nõ est ergo sicut a b ad b e, sic d e ad minorem e f: patuit quòd neque ad maiorem. Et sicut igitur a b ad b c, sic d e ad ipsam e f.

d f.	a c.	d b.
f e.	c b.	b e.

Itaque diuisæ magnitudines proportionales fuerint: compositæ quoque proportionales erunt. Quod ostendere fuerat operæpretium.

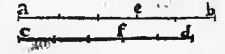
Θεώρημα ιθ, Πρότασις ιθ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Theorema 19, Propositio 19.

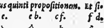
19 SI fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, erit sicut totum ad totum.

ORONTIVS. Quòd quinta huius, de ratione multiplici tantũ proposuisse uidetur: hæc de quibuscunque rationibus in uniuersum proponit. Sit igitur ut totũ a b, ad totũ c d, sic ablatũ a e ad ablatum e f. Aio reliquũ e b ad reliquum f d, fore sicut idem totum a b ad idem totũ c d.



Cùm enim, sit uelut a b ad c d, sic a e ad c f, per hypothesin: erit per decimamsextam huius quinti, & permutatim sicut a b composita ad a e, sic c d composita ad c f. Cùm autem compositæ magnitudines proportionales sunt, & diuisæ quoque sunt proportionales, per decimamseptimam huius quinti propositionem. Et sicut igitur a e ad e b, sic c f ad f d: & permutatim rursum, per eandem decimamsextam huius quinti, sicut a e ablata ad ablatã e f, sic reliqua e b ad reliquam f d.

ab, cd, ae, cf.

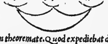


ae. eb. cf. fd.



Tota. Ablata. Reliqua.

ab, cd. ae, cf. eb, fd.



Sicut porrò ablata a e ad ablatam c f, sic totum a b ad totum c d, per hypothesin. Reliquũ igitur e b ad reliquum f d, se habet ut totum a b ad totum c d, per undecimã eiusdem quinti. Si fuerit ergo sicut totum ad totũ, &c. ut in theoremate. Quod expediebat demonstrare.

Lemma siue assumptum.

Et quoniam erat ex hypothesi, ut a b ad c d, sic a e ad c f: & permutatim ut a b ad a e, sic c d, ac f. Nunc porrò ostensum est, quòd sicut a b ad c d, sic e b ad f d. Et permutatim itaque rursum, ut a b ad e b, sic c d ad f d, per sæpius allegatã decimamsextam huius quinti. Fit igitur, ut sicut a b ad a e, sic c d ad e f: atque rursum uelut idem a b ad e b, sic idem c d ad f d.

a b. c d. e b. f d.



Corollarium.

Et proinde conuersio rationis, hoc est, acceptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsum excedit consequens, fit manifesta.

Conuersio rationis.

Θεώρημα κ, Πρόθεσις κ.

ΕΑν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

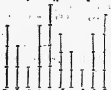
Theorema 20, Propositio 20.

SI fuerint tres magitudines, & aliæ eisdē æquales numero, binatim sumptæ, & in eadē ratione: ex æquali autē prima tertia maior fuerit, & quarta sexta maior erit: et si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

Aequā ratione respicientia in ordinatis.

ORONTIVS. ¶ *Sint tres magnitudines a, b, c, & rursū aliæ tres d, e, f, cum duabus ordinatim sumptis in eadem ratione: utpote, sicut a ad b, sic d ad e, sicut item b ad c, sic e ad f. Aio quòd si a fuerit maior ipsa c, erit ex æquali d maior ipsa f: et si æqualis, æqualis: si autem minor, itidem minor.* Sit primùm *a, maior ipsa c.* Et quoniā *est sicut b ad c, sic e ad f: erit & à conuersa ratione, sicut c ad b, sic f ad e, per corollarium quartæ huius quinti. uerùm c minor est a, per hypothesin, & b alia quædam magnitudo: habet igitur a ad b maiorem rationem, quàm c ad eandem b, per primam partem octauæ huius quinti.* Sicut *porrò c ad b, sic f ad e: & a igitur ad b maiorem rationem habet, quàm f ad e. sicut rursum a ad b, sic d ad e, per hypothesin: & d igitur ad e maiorem rationem habet, quàm f ad ipsam e.* Ad *eandem autem rationem habentium, maiorem rationem habens illa maior est, per decimam ipsius quinti.* Et *d igitur, ipsa f maior est.*

Prima differentia.



Secūda differentia.

¶ Q*uòd si a sit æqualis ipsi c, erit & d æqualis ipsi f: habebunt enim a & c ad eandem b eandem rationem, per primam partem septimæ huius quinti.* Et *quoniam est sicut a ad b, sic d ad e, sicútque c ad b, sic f ad ipsam e: habebunt quoque d & f eandem rationem ad ipsam e.* Q*uæ autē ad eadē eādē habent rationem, æquales adinuicē sunt, per primam partē nonæ ipsius quinti.* Aequalis *est igitur d, ipsi f.*

Tertia differentia.

¶ Haud *dissimiter ostendetur. quòd si a fuerit minor ipsa c: erit consequenter d minor ipsa f.* Tunc *enim c ad b maiorem rationem habebit, quàm a ad ipsam b, per eādem octauam huius quinti.* Est *autem ut a ad b, sic d ad e, per hypothesin: sicútque c ad b, sic f ad e se habere præostensum est.* Et *proinde f ad e maiorē rationem habebit, quàm d ad ipsam e.* Hinc *rursum per primam partem decimæ eiusdem quinti, f ipsa d maior erit: & d propterea ipsa f minor.* Itaque *si fuerint tres magnitudines, & aliæ eisdem æquales numero, & quæ sequuntur reliqua.* Q*uod oportuit demonstrasse.*

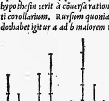
Θεώρημα κα, Πρόθεσις κα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Theorema 21, Propositio 21.

SI fuerint tres magnitudines, & aliæ eiſdem æquales numero, binatim ſumptæ, & in eadem ratione, fuerit autē perturbata earum proportio: ex æquali verò prima tertia maior fuerit, & quarta ſexta maior erit: etſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor.

ORONTIVS. ¶ *Sint tres magnitudines a, b, c, & rurſū aliæ tres d e, f, cū duabus perturbatim in eadem ratione coaſſumptis: utpote ſicut a ad b, ſic e ad f: ſicútque b ad c, ſic d ad e. Dico quòd ſi a fuerit maior c, erit ex æquali d maior f: etſi æqualis, æqualis: etſi minor, minor. ſit primùm a maior c: iam recipio probandum, quòd d ſit maior f. Et quoniam eſt ſicut b ad c, ſic d ad e, per hypotheſin: erit à cōuerſa ratione, ut c ad b, ſic e ad d, per quartæ huius quinti corollarium. Rurſum quoniam a maior eſt c, & b alia quædam magnitudo: habet igitur a ad b maiorem rationem, quàm c ad eandem b, per primā partem octauæ huius quinti. ſicut porrò a ad b, ſic ex hypotheſi e ad f: ſicútque c ad b, ſic e ad d (uti nunc oſtenſum eſt.) & e propterea ad f maiorem rationem habet, quàm ad d. Ad quam autem eadem magnitudo maiorem rationem habet, & illa minor eſt: per ſecundam partem decimæ ipſius quinti. Eſt igitur f ipſa d minor: & d ꝓpterea maior f.* ¶ *Haud diſſimiliter ſi a fuerit æqualis ipſi c: oſtendetur & d æqualis ipſi f. Nam a & c, ad eandem b eandem rationem habebunt: per primā partem ſeptimæ huius quinti. Et quoniā eſt ſicut a ad b, ſic e ad f, ſicútq; c ad b, ſic e ad d: & e igitur ad utranq; d & f eādē rationem habebit. Ad quas autem eadem eandem habet rationem, ipſæ ſunt æquales, per ſecundam partem nonæ ipſius quinti: Aequalis erit igitur d, ipſi f.* ¶ *Item ſi a fuerit minor c: dico tandem, quòd & d minor erit f. Tunc enim c ad b maiorem rationem habebit, quàm a ad eandem b: per eandem octauam huius quinti. Et cùm ſit uelut c ad b, ſic e ad d, ſicútque a ad b, ſic e ad f, (ueluti ſuprà deductum eſt) habebit conſequenter e ad d maiorem rationem, quàm e ad f. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, & illa minor eſt, per ſecundam partem decimæ eiuſdem quinti: Eſt itaque d ipſa f minor. Ergo ſi fuerint tres magnitudines, &c. ut in theoremate. Quod oſtendendum fuerat.*



Aequā rationem reſpicientia in perturbatis.

Quando prima maior eſt tertia.

Vbi prima æquatur tertiæ.

Quando prima minor eſt tertia.

Θεώρημα κβ, Πρόθεσις κβ.

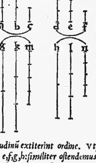
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Theorema 22, Propoſitio 22.

SI fuerint quælibet magnitudines, & aliæ eiſdẽ æquales numero, binatim ſumptæ in eadem ratione, & ex æquali in eadem ratione erunt.

Aequa ratio in ordinatis.

ORONTIVS. ¶ *Sint uerbi gratia tres magnitudines a, b, c, & aliæ eiſdem numero æquales d, e, f, cum duabus ordinatim ſumptis in eadem ratione: utpote, ſicut a ad b, ſic d ad e, ſicut autem b ad c, ſic e ad f.* Dico quòd *extremæ utriuſque ordinis magnitudines, ex æquali in eadem ratione erunt: ſicut quidem a ad c, ſic d ad f.* Accipiantur *enim ipſarum a, d, æquè multiplices g, h: ipſarum uerò b, e, aliæ itidem æque multiplices k, l: ipſarum denique c, f, utcunque etiam multiplices m, n.* Cùm *ſit igitur ut a ad b, ſic d ad e: & ipſarum a, d, hoc eſt primæ & tertiæ, æquè multiplices ſint g, h: ſecundæ autem & quartæ, utpote ipſarum b, e, aliæ itidem æque multiplices k, l.* Eſt *igitur ſicut g, multiplex ad k multiplicem, ſic h ad l: per quartam huius quinti.* Et *proinde erit ut k ad m, ſic l ad n: eſt enim ex hypotheſi, ut b ad c, ſic e ad f: & ipſarum b, e, æquè multiplices k, l: ipſarum c, f, æquè rurſum multiplices m, n, per conſtructionem.* Sunt *ergo g, k, m, tres magnitudines, & h, l, n, aliæ eiſdem numero æquales, cum duabus ordinatim ſumptis in eadem ratione: ſicut quidem g ad k, ſic h ad l, ſicútque k ad m, ſic l ad n.* Si *g itaque fuerit maior ipſa m, & ex æquali h ipſa n maior erit: et ſi æqualis, æqualis: et ſi minor, minor, per huius quinti uigeſimam.* Atqui *g, h, ipſarum a, d, hoc eſt primæ & tertiæ magnitudinis (quoad illationis ordinem) datæ ſunt æquè multiplices, m, n autẽ ſecũdæ & quartæ, utpote ipſarũ c, f æque itidẽ multiplices.* Eſt *igitur per ſextam huiuſce quinti diffinitionẽ, ut prima a ad ſecundam c: ſic d tertia, ad quartã f.*

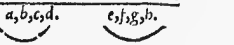


Vbi plures tribus in vtroque magnitudinũ extiterint ordine.

¶ *Idem quoque licebit oſtendere, ubi plures tribus in utroque magnitudinũ extiterint ordine.* Vtpote *ſi fuerint quatuor a, b, c, d, & aliæ quatuor e, f, g, h: ſimiliter oſtendemus cum tribus primis magnitudinibus a, b, c, & e, f, g, fore uelut a ad c, ſic e ad g.* Et *rurſum cũ tribus ſuccedentibus (ſecunda utrobique prætermiſſa, & coaſſumpta quarta,) utpote a, c, d, & e, g, h: concludemus ueluti ſuprà, fore ut a ad d, ſic e ad h.* Et *deinceps quantumlibet,*

pro

pro utriusque ordinis multitudine. Si fuerint ergo quælibet magnitudines, & aliæ eisdem æquales numero: & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum proposueramus.



Θεώρημα κγ, Πρότασις κγ.

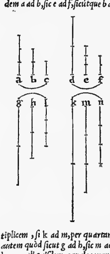
Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Theorema 23, Propositio 23.

23 SI fuerint tres magnitudines, aliæque eisdem æquales numero, binatim sumptæ in eadē ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Aequa ratio in perturbatis.

ORONTIVS. *Sint tres magnitudines a,b,c & aliæ eisdem numero æquales d,e,f, cum duabus in eadem ratione perturbatim coassumptis: sicut quidem a ad b, sic e ad f, sicútque b ad c, sic d ad e. Aio fore ex æqua ratione, sicut a ad c: sic d ad f. Assumantur enim ipsarum a,b,d, æquè multiplices g,h, k: ipsarū porrò c,e,f, aliæ itidem æquè multiplices, l, m,n. Cum ergo g,h, ipsarum a, b, sint per constructionem æquè multiplices, & partes eodem modo multiplicium eandem habeant rationē sumptæ adinuicem, per quindecimā huius quinti: est igitur ut a ad b, sic g ad h. Sicut autem a ad b, sic e ad f, per hypothesin: & sicut igitur g ad h, sic e ad f, per undecimam ipsius quinti. Rursum quoniā m, n, ipsarum e,f, sunt æquè multiplices: erit rursum per eandem quindecimam huius quinti, ut e ad f, sic m ad n. Sicut porrò e ad f, sic g ad h se habere monstratum est: & sicut itaque g ad h, sic m ad n, per ipsam undecimam eiusdem quinti. Insuper quoniam est sicut b ad c, sic d ad e, per hypothesin: & ipsarum b d, sumptæ sunt æquè multiplices, h, k, ipsarum uerò c, e, aliæ itidem æquè multiplices l, m. Est igitur ut h multiplex, ad l multiplicem, si k ad m, per quartam huius quinti propositionem. Ostensum est autem quòd sicut g ad h, sic m ad n. Sunt itaque g,h,l, tres magnitudines, & k,m,n, aliæ eisdem æquales numero, cū duabus in eadem ratione perturbatim coassumptis: sicut quidem g ad h, sic m ad n, sicut rursum h ad l, sic & k ad m. Ergo si g fuerit maior l, erit ex æquali k maior n: & si æqualis, æqualis: si*



autem minor, itidem minor, per uigesimamprimã huius quinti. Porrò g, k, sunt æquè multiplices ipsarum a, d, primæ & tertiæ magnitudinis (seruato illationis ordine) l autem & n, secundæ & quartæ, hoc est ipsarum c, f, æquè rursum multiplices, per constructionem. Est igitur ut prima a, ad secundam c: sic tertia d, ad quartam f, per sextam eiusdem quinti diffinitionem. Si fuerint igitur tres magnitudines, aliæque eisdẽ æquales: &c. ut in theoremate. Quod oportuit ostendisse.

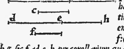
Θεώρημα κδ', Πρόθεσις κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Theorema 24 Propositio 24.

SI primum ad secundum eandem habuerit rationem, & tertium ad quartum, habuerit autem & quintum ad secũdum eandem rationem & sextum ad quartum: & composita primum & quintum ad secundum eandem habebunt rationem, & tertium & sextum ad quartum. 24

ORONTIVS. ¶ *Quòd secunda huius quinti, de ratione tantùm proposuit multiplici: hæc indifferenter ad omnem rationum sese extendit similitudinem. Habeat itaque primum a b, ad secundum c eandem rationem, quam tertium d e, ad quartum f: quintum rursus b g, ad secundum c eandem quoque rationem habeat, quam sextum e h, ad ipsum f quartum. Aio, quòd & composita primum & quintum a g, eandem rationem habebunt ad idem secundum c: quam tertium & sextum d h, ad idem quartum f. Cũ enim sit ex hypothesi, ut b g ad c, sic e h ad f: & à conuersa itaque ratione, erit ut c ad b g, sic f ad e h, per corollarium quartæ huius quinti. Præterea quoniam ex ipsa hypothesi, est sicut a b ad c, sic d e ad f: sicut rursum c ad b g, sic f ad e h.*



a b. c. b g.   d e. f. e h.

Et ex æquali igitur, sicut a b ad b g, sic d e ad e h: per uigesimamsecundam huius quinti. Diuisæ itaque magnitudines a b, b g, d e, & e h, sunt proportionales. Et compositæ igitur, per decimam octauam ipsius quinti, proportionales erunt: ut a g ad g h: sic d h ad h e. Receptum est autem, sicut b g ad c, sic e h ad f. Et ex æquali igitur, per eandem uigesimamsecundam quinti, sicut a g ad c, sic d h ad f. Ergo si primum ad secundum eandem habuerit rationem, & tertium ad quartum: & quæ sequuntur reliqua. Quod expediebat demonstrare.

a g. g h. c.   d h. h e. f.

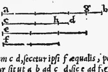
Θεώρημα κε, Πρόθεσις κε.

ΕΑν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Theorema 25, Propositio 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis maiores erunt.

ORONTIVS. *Sint quatuor eiusdem generis magnitudines a b, c d, e, & f, inuicem proportionales, sicut quidem a b ad c d, sic e ad f: sitque a b omnium maxima, f uerò minima. Dico quòd a b & f, reliquis c d & e sunt minores. Quoniam enim a b omnium quatuor supponitur maxima: maior est igitur a b, ipsa e magnitudine. A maiori itaque a b, secetur æqualis ipsi e minori, per tertiam primi: sitque a g. Rursum quoniam est ut a b ad c d, sic e ad f, prima autem a b, maior est tertia e: & secunda igitur c d, ipsa f quarta maior erit, per decimamquartam huius quinti. A maiori rursum c d, secetur ipsi f æqualis, per eandem tertiam primi: sitque h d. Cùm igitur sit ut a b ad c d, sic e ad f, & æqualis sit a g ipsi e, & c h ipsi f: est igitur ut a b ad c d, sic a g ad c h, hoc est, sicut totum a b ad totum c d, sic ablatum a g ad ablatum c h. Et reliquum itaque g b ad reliquum h d erit, sicut totum a b ad totum c d: per decimamnonam ipsius quinti. Prima autem a b, maior est tertia c d: & secunda itaque g b, maior erit quarta h d, per ipsam decimamquartam eiusdem quinti. Porrò a g æqualis est ipsi e: & c h ipsi f, per constructionem. Binæ igitur a g & f, duabus c h & e, sunt per secundam communem sententiam æquales. Si autem inæqualia æqualibus adiunguntur, omnia erunt inæqualia: per quartam communem sententiam. Et quoniam ipsis a g & f additur g b, ipsis autem c h & e additur h d, & maior est g b ipsa h d: maiores ergo sunt a b maxima & f minima, reliquis c d & e magnitudinibus.*



Quod receperamus ostendendum.

Quinti libri Geometricorum Elementorum, FINIS.

Orontij Finæi Delphi-
NATIS, REGII MATHEMATICA-
rum professoris, in sextum elementorum Euclidis, Demonstrationes.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

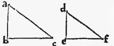
Ὅροι. ε.

Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμα ἐστὶν, ὅσα τάς τε γωνίας ἔχει ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Diffinitiones. 5.

Similes figuræ sunt, quæ & angulos æquales habent ad vnum, & quæ circa angulos æquales sunt latera proportionalia. 1

Vtpote, si fuerint bina triangula a b c, & d e f inuicem æquiangula, fueritque angulus qui ad a æqualis angulo qui ad d, & qui ad b est angulus ei qui ad e, atque is qui ad c angulo qui ad f respondẽter æqualis: sitque insuper ut a b latus ad b c, sic d e ad e f: utq; b c ad c a, sic e f ad f d: atque demũ sicut c a ad a c, sic f d ad d e. Huiuscemodi nanque triangula, similia nuncupamus: etiam si fuerint inæqualia.



Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Reciprocæ autem figuræ sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes termini rationales fuerint. 2

De rectilineis uidetur intelligere figuris. quemadmodum si duorum rectilineorum & æquiangulorum a b c & d b e, angulũ qui sub a b & b c, ei qui sub d b & b e cõtinetur æqualem habentiũ: fuerit sicut latus a b ad latus b d, sic latus e b ad latus b c: aut sicut a b ad b e, sic d b ad b e. Tali nanque modo sit antecedentiũ & consequentiũ terminorum, hoc est, comparatorum adinuicem laterum, quæ circum æquales angulos, reflexa proportio, reciprocáue rationum similitudo: dicunturque eiuscemodi figuræ, cùm ad adinuicem comparantur, reciprocæ.



Ἄκρον

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

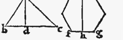
Per extremam & mediam rationem, recta linea diuidi dicitur: quando fuerit sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad minus.



Per extremam & mediam rationem, hoc est, per extremos & medios terminos rationum similitudinem constituentes. Vtpote, si data recta linea a b, diuidatur in puncto c: fueritque ut tota a b ad segmentum maius b c, sic idem segmentum b c, ad reliquum c a.

Ὕψος ἐστὶ, παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Altitudo est, vniuscuiusque figuræ à vertice ad basin perpendicularis deducta.



Exempli gratia, trianguli a b c altitudo, erit a d recta linea, ab a uertice ad basin b c perpendiculariter incidens. Et hexagoni e f g altitudinem, ostendet perpendicularis e h, quæ ab e uertice, in basin f g deducitur.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινας.

Ratio ex duabus rationibus, aut ex pluribus constare dicitur: quando rationum quantitates multiplicatæ, aliquam efficiunt quantitatem.

De compositione rationũ interpretatio notanda.

Expressimus diffinitione tertia libri quinti, quidnã rationẽ adpellemus: quot insuper rationũ fuerint species siue differentiæ, atque singula in uniuersum cõprehẽsa rationũ discrimina. Nunc porrò diffinit Euclides, quónãmodo ratio ex rationibus cõponi, seu cõstare dicatur. Ea nãque ratio ex rationibus constat, siue cõponitur: quarũ quãtitates inuicẽ multiplicatæ illã efficere uidentur. De ea rationis cõpositione, seu rationaliũ terminorũ illatione, hic minimè uelim intelligas: quã decimaquarta libri quinti diffinitione, compositam rationẽ adpellauimus: acceptionẽ uidelicet antecedentis cũ consequente, sicut unius, ad ipsum cõsequens. Aliud siquidẽ est, rationẽ ex rationibus cõponere: aliud uerò in proportionibus, à diuisis rationũ terminis ad cõiunctos siue cõpositos, proportionem aliquã subinferre. Ait igitur Euclides, rationẽ ex binis aut pluribus rationibus cõponi, siue constare: cũ datarũ rationũ quãtitates fuerint adinuicẽ multiplicatæ, & aliã quãpiam genuerint rationis quãtitatem. Ea enim quantitas, rationẽ exprimit, quæ ex datis rationibus procreatur. Fit autem huiuscemodi quãtitatum multiplicatio, inter duarũ tantũmodo rationum quãtitates. Nã ubi plures sese obtulerint rationes, ea in primis colligatur ratio, quæ ex multiplicatione duarũ primarũ quãtitatum generatur. Ex hac postmodum ratione & sequẽte tertia, alia ratio procreanda est. Hinc rursum, per quãtitatum huiusce ra-

Diffinitionis interpretatio

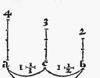
Vbi plures duabus extiterint rationes.

tionis & succedentis quartæ multiplicationem, consurgens ratio tandem eliciatur. Idque deinceps, pro datarum rationum multitudine: siue datæ rationes eiusdem, aut diuersæ fuerint speciei, & sub cõtinua aut discontinua ordinatáue seu perturbata proportione constitutæ. ¶ *Quãtitates autem rationum hic uocat Euclides, non illas quæ sub datis continentur rationibus: sed ad numeros relatas, à quibus rationes ipsæ denominantur. Vt in discretis duo, à quibus dupla: tria, à quibus tripla: & quatuor, unde quadrupla ratio in multiplicibus exprimitur. Aut in superparticularibus unũ & dimidium, à quo sesqualtera: unum & tertium, a quo sesquitertia: unũ insuper & quartũ, unde sesquiquarta ratio nomenclaturã accipit. Itẽ unum & duo tertia, unde rationem superbipartientem tertias: atq; unũ & tria quarta, ex quibus supertripartientem quartas in superpartientibus adpellamus. Haud alienũ habeto iudiciũ, de rationibus ex multiplici & superparticulari ratione, aut ex multiplici & superpartiente cõpositis: & datis quibuscunque singularum quinque rationalium specierum differentiis. Necnon & de surdis irrationalium quantitatum rationibus: quæ ex surdis itidem & ignotis rationibus constare uidentur.*

Quænã sint rationũ quãtitates.

Exemplũ vbi ratio multiplex ex binis componitur rationibus.

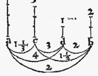
¶ ESTO, *lucidioris intelligentiæ gratia, data in exemplum ratio multiplex, ipsius inquàm a ad b dupla, ponatúrque inter a & b, alia quædã magnitudo c, subsesquitertia ipsius a, & sesqualtera ipsius b. Aio ratione a ad b, cõponi siue cõstare ex ratione a ad c, & ratione c ad b. Nam si quãtitas rationis a ad c, utpote unum & tertium, per rationis quãtitatem ipsius c ad b, unum inquã & dimidium multiplicetur: prouenient duo, à quibus dupla ratio (quam habet a ad b) nominatur. Cum enim c magnitudo ad a magnitudinẽ sit subsesquitertia, ad b autẽ sesqualtera: qualiũ igitur partium c est trium, talium necessum est a fore quatuor, & b duarum similium. Habet igitur a ad b rationem, quã quatuor ad duo: & proinde duplã, ex sesquitertia ipsius a ad c, & sesqualtera ipsius c ad b resultãtem.*



Exempli demonstratio.

¶ *Sit rursum in maiorẽ expressionem, inter c & b alia quædã magnitudo d, subtripla ipsius c, ipsius autẽ b subdupla. Aio quoque rationẽ a ad b, ex rationibus a ad c, & c ad d, atq; d ad b cõstare. Duco enim unũ & tertiũ rationis a ad c denominatorem, in tria denominatorẽ triplæ, quæ est c ad d: fiẽt quatuor, ostẽdentia a ad d quadruplã obtinere rationẽ. Et quoniã d ad b ratio, minoris est inæqualitatis, nẽpe subdupla a dimidio denominata: ducẽda sunt igitur quatuor, à quibus nominatur quadrupla in, dimidium ipsius subduplæ denominatorẽ: prouenient enim duo, duplã (quæ est ipsius a ad b) rationẽ denominãtia. Nã cũ d subduplũ sit ipsius b, & subtriplũ ipsius c: qualium igitur d est unũ, taliũ b est duorũ, & c triũ similiũ. Itẽ quoniã a ad c est sesquitertium:*

Exẽplum vbi vna datarum rationũ fuerit minoris inequalitatis.

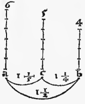


Ostensio eiusdem exempli

tertium: qualium propterea c est trium, a erit quatuor. sed qualium c est trium, b duorum esse deductum est: qualium itaque b est duorum, a quatuor exit similium. Quatuor rursum ad duo, rationem habent duplam, qualem a ad b obtinere supposuimus. ¶ *Sed demus exemplum in ratione superparticulari: sitque a ad b sesqualtera, ad c autem sesquiquinta, & c ad b sesquiquarta. Dico rationē sesqualteram, ex sesquiquarta & sesquiquinta resultare. Si nanque multiplicaueris unum & quartum, per unum & quintum: prouenit unum & dimidium, a quibus sesqualtera ratio denominatur. Cùm enim c subsesquiquintum sit ipsius a, & sesquiquartum ipsius b: qualium ergo partium c est quinque, talium a erit sex, & b quatuor similium: habent autem sex ad quatuor, uelut a ad b, rationem sesqualterā.*

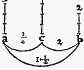
Exemplū de ratione super particulari.

Inductio.



Aliud exemplum superparticularis, vbi vna rationum minoris est inæqualitatis.

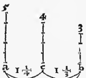
¶ *Quòd si c magnitudo fuerit ipsius a sesquitertia, et dupla ipsius b, ut in secūda figura. Ratio ipsius a ad c, à tribus quartis denominabitur: & ipsius c ad b, a binario. Ducenda sunt propterea tria quarta in duo, fiet sex quarta: quæ reuocantur ad unum integrum, & ipsius integri dimidium, sesqualteræ rationis (quæ est a ad b) denominator. Nam cùm c ad a sit sesquitertium, ad b autem duplum: qualium proinde partium c est quatuor, talium a est trium, & b duarum similium. Ratio igitur a ad b, est ut tria ad duo, quæ sesqualtera nūcupatur.*



Exempli declaratio.

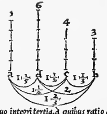
¶ *Idem in superpartiete ratione, tandem obseruari uidebis. sit enim a ad b superbipartiēs tertias: & inter a & b incidat c, subsesquiquartū ipsius a, & sesquitertiū ipsius b. Dico iam rationē a ad b, cōponi ex ratione a ad c sesquiquarta, & sesquitertia ipsius c ad b. Multiplicetur enim unū & quartū, per unū & tertium: fiet unū & duo tertia, unde superbipartiens tertias (quæ est ipsius a ad b) denominatur. Oportet enim propter rationū hypotheses, qualium partium c fuerit quatuor, talium b fore trium, & a quinque similium. Quinque porrò ad tria, eam seruant rationem, quam a ad b: nempe superbipartientem tertias.* ¶ *Quòd si inter a & c inciderit magnitudo d, subsesquiquinta ipsius a, & ipsius c sesqualtera. Ratio a ad b, ex rationibus a ad d, & d ad c,*

Exemplū de superpartientis compositione.



Ostensio exēpli.

atque



Aliud superpartietis exemplum, vbi vna rationum minoris est inaequalitatis.

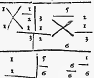
atque c ad b tertiâ côponetur. Si ducâtur enim quinque sexta, à quibus denominatur ratio magnitudinis a ad ipsam d, in unû & dimidiu, denominatorê uidelicet rationis quâ ha bet d ad c: fient quindecim duodecima quæ reducuntur ad unû integrû & ipsius integ quartâ, à quibus denominatur ratio sesqui quarta ipsius a ad c. Hæc autê ducta in nu & tertiu, hoc est, denominatorê rationis sesquitertiæ ipsius c ad b: fiet unû integrû & duo integri tertia, à quibus ratio a ad b denominâda est, quæ superbipartiens tertias adpellatur. Idê quoque per superius expressam partiûcû rationibus dations, & rationû cû partibus collatione deducere uel facile licebit: qualium enim partium c fuerit quatuor, & d sex, talium b erit trium, & a quinque similium. Hinc rursum consurgit a ad b ratio, ut quinque ad tria. Porrò si forsitan in hac partium quotarum, seu fractionum uulgariû multiplicatione minus fueris exercitatus, consulito librum secundum nostræ Arithmeticæ practicæ.

Sûmaria exêpli recollectio.

NEC uolumus te latere, huiuscemodi quâtitatum (à quibus datæ rationes nominâtur) tum expressionê, tum etiâ multiplicationê, per astronomicas, hoc est sexagenarias integrorû fractiones (quæ scrupula, seu minuta uocât) indifferêter absolui posse: de quibus libro tertio eiusdê Arithmeticæ nostræ abunde tractauimus. Est enim sexagenarius numerus, propter partium quotarum in eo con tentarum multitudinem, omnibus rerum supputationibus indifferenter adcommodus. Conferamus in exemplum utrunque calculum: & primâ rationis côpositionê, ubi rationem a ad b duplâ, ex sesquialtera & sesquitertia constare mô strauimus, rursum examinemus. Multiplico itaque unum & dimidium, per unum & tertiu, in hunc qui sequitur modum. Duco primùm integra in sese: fit unum integrum. Deinde numeratorem fractionis multiplicandæ, in integrum multiplicantis: atque numeratorem multiplicâtis, per integrum multiplicandæ:

De fractionû astronomicarum commoditate, in rationum compositionibus.

Primi exêpli supputatio, per fractiones vulgares.



procreabuntur enim fractiones prioribus haud dissimiles, utpote dimidium, & unum tertium, quæ reducta ad unâ fractionem simplicem, efficiunt quinque sexta. Tandem multiplico fractiones ipsas adinuicem, numeratores quidem per sese, atque denominatores: fiet unum tantummodò sextum. Compono unum sextum & quinque sexta: consurgunt sexta sex, quæ unû ualent integrum priori integro adiiciendum. Resultabunt itaque duo integra, à quibus propositâ ratio dupla denominatur. Verum idem per astronomica inquiramus scrupula, siue minuta. Denominator itaque sesqual teræ rationis, erit unum integrum, & triginta integri minuta: ipsius uerò sesquitertiæ rationis denominator, unum itidem integrum, & minuta uiginti. Sunt enim triginta, dimidium: uiginti autem, tertium sexagenarij numeri.

Eiusdê exempli supputatio, per fractiones astronomicas.

Duco

Duco igitur triginta minuta, in minuta uiginti: fiunt secunda sexcenta, quæ diuisa per sexaginta, restituunt decem minuta. hæc subscribo suo loco. Deide multiplico unum integrum per ipsa uiginti minuta: redeũt minuta uiginti. hæc nõ subprioribus decem minutis. Postea duco triginta minuta in unum integrum, restituuntur minuta triginta: nam fractio per integra multiplicata, similem uidetur producere fractionẽ. Quibus subnotatis, multiplico integra adinuicem: & unum tantummodò restituitur integrum. Compono tandem decẽ, uiginti & triginta minuta: consurgunt sexaginta, quæ unum ualent integrum priori denuum adiungendum. Proueniunt igitur ex hac quantitatum multiplicatione duo integra, à quibus dupla ratio (quæ erat a ad b) uenit denominanda. In cæteris respondenter facito, siue uulgaribus, siue astronomicis iuuet uti fractionibus.

Integra.	Minuta.	secunda.
1	30	00
1	20	00
	10	00
	20	10
1	30	0
2		6

¶Est & alius rationalium quantitatum multiplicandi modus, ipsis potissimũ numeris ad numerúmue relatis quantitatibus peculiaris. Nam ex eorundem numerorum sub datis rationibus constitutorum multiplicatione, numeri procreãtur, sub composita, uel inde constante ratione sẽ habentes. Multiplicandi sunt itaque primùm antecedentes numeri adinuicem, & antecedens ipsius compositæ rationis efficietur. Deinde consequentes itidem inter sẽse ducendi, ut consequens eiusdem rationis generetur. ¶Repetatur in maiorem singulorum euidentiam, antecedentis primæ compositionis exemplum: sintque rursum numeri, tria ad duo in ratione sesqualtera, & quatuor ad tria in sesquitertia ratione constituti. Duc igitur antecedentes numeros inter sẽse, utpote quatuor in tria: fient duodecim, quæ progeneratæ rationis antecedẽte subnotabis. Postea cõsequentes, hoc est tria & duo, inuicem multiplicato: fient sex, eiusdem productæ rationis consequentem exprimentia numerum. Atqui duodecim ad sex, duplam constat obtinere rationem, ex sesqualtera & sesquitertia resultantem. ¶Sint rursum binæ rationes, altera quidem subsesquitertia, ut trium ad quatuor: altera uerò dupla, ut uti quatuor ad duo. Si compositam ex his uolueris obtinere rationem, ducito tria in quatuor, unum uidelicet antecedentium in reliquum: fient duodecim. Postmodùm ipsa consequentia inuicem multiplicato, ut pote quatuor in duo: fient octo. Porro duodecim ad octo, sesqualteram rationem obseruant: qualem exemplo quarto (denominatorem dudũ, per ipsius subsesquitertiæ denominatorem diuidendo) reperimus. ¶Haud dissimiliter ex sesquiquarta & sesquitertia, ueluti quinque ad quatuor, & quatuor

Alius modus componendi rationes adinuicem.

Primum exẽplum de compositione multiplicis.

Ratio	sesqualtera.	3 —— 2
	sesquitertia.	4 —— 3
Dupla ex eisdem cõposita		12 —— 6

Secundum exemplum, de cõpositione superparticularis.

Ratio	Subsesquitertia.	3 —— 4
	Dupla.	4 —— 2
Sesqualtera ratio.		12 —— 8

Tertium exẽplum de compositione superpartientis

Ratio	sesquiquarta.	5 —— 4
	sesquitertia.	4 —— 3
Superbipartiens tertias.		20 —— 12

ad tria, superbipartiens tertias producetur: quemadmodum precedēs monstrat formula. Ex antecedentium nanque multiplicatione, fient uiginti: ex multiplicatione uero consequentium, duodecim. continent autem uiginti semel duodecim, & duo insuper eorundem tertia. ℂ*Et proinde non minus facile colligemus, ex quintupla & subdupla ratione, conflari duplam sesqualteram: necnon ex dupla & sesquitertia, duplam superbipartientem tertias resultare. sed hæc de rationū compositione, siue rationalium quantitatum multiplicatione, sint satis.*

Ratio	Quintupla.	5 —— 1	Rō	Dupla.	2 —— 1
	Subdupla.	2 —— 4		Sesquitertia.	4 —— 3
Dupla sesqualtera.		10 —— 4	Dup. superbipartiens ter.		8 —— 5

ℂCorollarium.

De subtractione rationū adinuicem.

ℂHINC *fit manifestum, quòd si a qualibet ratione composita, unaquæque componentium subtrahatur: prosiliet ipsarum componentium reliqua. Subtrahitur quidem ratio, non omnis indifferenter à qualibet: sed minor tantùm à maiori. Hæc autem rationum disgregatio per diuisionem, sicuti compositio per multiplicationem absoluitur: idque rursum dupliciter.* ℂ *In primis enim, si compositæ rationis denominatorem, per denominatorem alterius componentium diuiseris: habebis reliquæ rationis denominatorem, siue numeros in relicta ratione constitutos. Oportet autem (ubi alterius uel utriusque rationis denominator, integro & fracto exprimetur numero) ipsa integra ad simile genus denominationis cū propria, uel occurrente fractione reducere: postea numeratorem diuidendæ rationis, per communem multiplicare denominatorem, fiet enim relictæ rationis numerator. Deinde numeratorem diuidentis, in eundem communem denominatorem ducere, nam eiusdem relictæ rationis prodibit denominator. Quemadmodum ex secundo libro nostræ deprehendere potes Arithmeticæ.* ℂ*Resumatur in exemplū ratio dupla, ex sesquitertia & sesqualtera resultans: sitque propositum alteram componentium, utpote sesquitertiam, ab ipsa dupla ratione subducere. Denominator itaque sesquitertiæ, est unum & tertium, quæ quatuor efficiunt tertia: duo autem, à quibus dupla denominatur ratio conficiunt tertia sex. Diuide itaque sex tertia, per quatuor tertia, in hunc modum. Duc sex in tria, fient decem & octo: & rursum quatuor per tria multiplicato, fient duodecim. Et quoniam decem & octo continent semel duodecim, & alteram earundem partem: relicta itaque ratio, sesqualtera est.*

Primus modus.

Primum exemplum.

$$\frac{6}{3} \times \frac{4}{3} \qquad \frac{18}{12}$$

ℂ *Detur rursum sesqualtera ratio, à qua uelis auferre sesquiquintam. Ex uno itaque & dimidio, à quibus sesqualtera denominatur, fiunt tria secunda: ex uno autem & quinto, ipsius sesquiquintæ denominatore, fiunt quinta sex. diuidenda sunt igitur tria secunda, per sexquinta. Duc itaque tria in quinque, fient quindecim: postea sex in duo multiplicato, prouenient duodecim. Et quoniam quindecim ad duodecim, rationem habent sesquiquartam: idcirco relicta ratio, sesquiquarta dicetur. Nam ex sesquiquarta & sesquiquinta ratione, sesqualtera (ueluti suprà deduximus) generatur.*

Secundum exemplum.

$$\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} \qquad \frac{15}{12}$$

ℂPotest

¶POTERIS & idem per numeros, in datis rationibus constitutos, responde ter absoluere. Dentur enim rursum numeri, sub antecedentibus rationibus constituti, utpote duo ad unum in dupla, & quatuor ad tria in sesquitertia ratione se habentes: sitque ueluti prius, sesquitertia ab ipsa dupla ratione subducenda.

Alius subtrahendi modus rationes adinuicem.

2 ╳ 1		Dupla, diuidentia.
4	3	Sesquitertia
6 —— 4		Sesqualtera relicta.

Scribatur inprimis sesquitertia, sub eadem ratione dupla. Postea, multiplicato duo in tria hoc est, antecedens diuidendæ rationis, in consequens diuidentis: fient sex. Rursum ducito unum in quatuor, utpote consequens ipsius diuidendæ rationis, in diuidentis antecedens: fient quatuor. A ratione igitur quam habent sex ad quatuor, relicta ratio denominanda est: quæ rursum ostenditur sesqualtera. ¶Subducamus rursum ad maiorem singulorum respondentiam, à sesqualtera ratione, præfatam rationem sesquiquintam. Propone itaque tibi numeros sub datis rationibus constitutos: utpote, tria ad duo in sesqualtera, & sex ad quinq; in sesquiquinta. Et posita sesquiquinta sub sesqualtera: ducito tria in quinque, fiet quindecim: postea multiplicato duo per sex, prouenient duodecim. Habent autem quindecim ad duodecim, rationem sesquiquartam, qualem superius offendimus. Haud aliter, de cæteris quibuscunque inuicem subducendis facito rationibus, & si minus in hoc genere calculi fueris exercitatus, ad caput secundum libri quarti ipsius Arithmeticæ nostræ confugito.

Aliud exemplum.

3 ╳ 2		sesqualtera ratio.
6	5	sesquiquinta.
15 — 12		sesquiquarta.

Θεώρημα α, Πρότασις α.

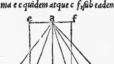
ΤΑ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Theorema 1, Propositio 1.

1 TRiangula & parallelogramma, quæ sub eadem sunt altitudine: ad se inuicem sunt, vt bases.

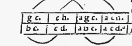
OONTIVS. ¶Sint bina triangula a b c & a c d, totidémque parallelogramma e c quidem atque c f, sub eadem altitudine, seu perpendiculari ex a uertice in b d basin incidente constituta. Aio in primis triangulum a b c, ad triangulum a c d se habere, ueluti basis b c ad basin c d. Cùm enim e c & c f parallelogramma, in eadem sint altitudine: in directum est igitur e a ipsi a f, atque b c ipsi c d: & proinde e f, ipsi b d parallela. Producatur igitur recta b d ex utraque parte in continuum rectúmque, ad g & h puncta, per secundum postulatum. secetur deinde b g, æqualis ipsi b c: necnon d l & l h, ipsi c d æquales: per tertiam primi: & per primum postulatum, connectantur a g, a l, & a h lineæ rectæ. Cùm itaque g b, ipsi b c sit æqualis, erunt triangula a g b & a b c, in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis e f & g h constituta: & propterea inuicem æqualia, per trigesimamoctauam primi. & proinde a c d, a d l & a l h triangula, æqualia quoque erunt adinuicem.

Figuræ constitutio.



Prima deductio theorematis, de triangulis.

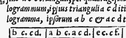
Quotuplex igitur est g c basis, ipsius b c: totuplex est triangulum a g c, ipsius a b c trianguli. Quotuplex rursum est c h basis, ipsius c d: totuplex est & a c h triangulum, ipsius trianguli a c d. Si basis itaque g c, maior est basi c h. erit a g c triangulum, triangulo a c h proportionaliter maius. Et si g c & c h bases, fuerint inuicem æquales: erunt a g c & a c h triangula, æqualia quoque adinuicē. Quòd si basis g c, minor extiterit basi c h: erit & a g c triangulum, ipso a c h triangulo æque itidem minus. Quatuor itaque magnitudinum, duarum inquam basium b c & c d, totidémque triangulorum a b c & a c d, sumpta sunt æquè multiplicia primæ & tertiæ: necnon secundæ & quartæ, alia utcunque æquè multiplicia.



Et sicut multiplex primæ magnitudinis, ad multiplex secundæ, hoc est, g c basis, ad basin c h: sic multiplex tertiæ, ad multiplex ipsius quartæ, utpote a g c triangulum, ad triangulū a c h, se habere præostensum est. Sicut igitur prima, ad secundam prædictarum magnitudinum: sic tertia ad quartam, per sextam ipsius quinti diffinitionem. Vt basis ergo b c, ad basin c d: sic triangulum a b c, ad triangulum a c d. Quòd prius uenebat ostendendum.

Secunda theorematis resolutio, de parallelogrammis.

¶Insuper quoniam a b c triangulum, & parallelogrammum e c, in eadem sunt basi, & in eisdem parallelis constituta: duplum est est e c parallelogrammum, ipsius a b c trianguli, per quadragesimamprimam primi: & propterea c f parallelogrammum, ipsius triangulia c d itidem duplum. Sunt igitur e c & c f parallelogramma, ipsorum a b c & a c d triangulorum æquè multiplicia. Partes autē æque multiplicium, eandem rationē habent sumptæ adinuicem: per decimamquintam quinti.



Vt igitur a b c triangulum, ad triangulum a c d: sic parallelogrammum e c, ad c f parallelogrammum. Ostensum est autem a b c triangulum, ad triangulum a c d se habere, ueluti b c basis, ad basin c d. Binæ itaque rationes, utpote b c basis, ad basin c d, atque parallelogrammi e c ad c f parallelogrammum, eædem sunt cum ratione ipsius a b c trianguli, ad triangulum a c d. Quæ autem eidem sunt eædem rationes, & adinuicem sunt eædem: per undecimam eiusdem quinti. Est igitur ut basis b c, ad basin c d: sic parallelogrammum e c, ad c f parallelogrammum. Poterit & ipsorum parallelogrammorum ratio, quemadmodum & triangulorum, seorsum demonstrari: descriptis super g b, d l, & l h basibus, & in eadem altitudine, parallelogrammis. Triangula itaque & parallelogramma, quæ sub eadem sunt altitudine: ad se inuicem sunt, ut bases. Quod erat ostendendum.

Notandum.

Θεώρημα β, Πρόθεσις β.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα,

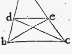
εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσαι τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

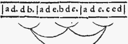
Theorema 2, Propositio 2.

SI trianguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea parallela: proportionaliter secat ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: ad segmenta connexa recta linea, parallela ad reliquum erit ipsius trianguli latus.

ORONTIVS. ¶ *In triangulo enim a b c, agatur recta d e, ipsi b c lateri parallela. Dico primùm, ipsam d e, secare a b & a c latera proportionaliter: sicut quidem a d ad d b, sic a e ad e c.* Connectantur enim *b e & c d lineæ rectæ: per primum postulatum.* Erunt itaque *b d e & c e d triangula, in eadem basi d e, ac in eisdem parallelis b c & d e: & proinde inuicem æqualia, per trigesimamseptimam primi.* Est *autem & a d e, aliud quoddam triangulum.* Idem *porrò triangulum, ad æqualia triangula eandem habet rationem: per septimam quinti.* Ergo *sicut a d e triangulum, ad triangulum b d e: sic idem triangulum a d e, ad c e d triangulum.* Est *autem a d e triangulum, ad triangulum b d e, ueluti basis a d ad basin d b, per primam huius sexti: sunt enim sub eodem uertice e, & proinde sub eadem altitudine.* Et *sicut igitur basis a d, ad basin d b: sic a d e triangulum, ad triangulum c e d, per undecimam quinti.* Si*cut rursum a d e triangulum, ad triãgulũ c e d: sic basis a e, ad basin e c, per eandem primam huius sexti: sunt enim a d e & c e d triangula sub eodem uertice d: & sub eadem consequenter altitudine.* Et *sicut igitur a d basis, ad basin d b: sic basis a e, ad basin e c, per eandem undecimam quinti.* Secat *ergo d e parallela, ipsa a b & a c latera, in punctis d & e proportionaliter.*

Prima theorematis pars







¶ *Sed iam esto ut a d ad b, sic a e ad e c: & connectatur recta d e, per primum postulatum.* Aio *uersa uice, d e ipsi b c fore parallelam.* Connexis *enim (ueluti prius) b e atque c d rectis, per idem primum postulatum: erit rursum, per primam huius sexti, triangulum a d e ad triangulum b d e, ueluti basis a d ad basin d b.* At *sicut a d ad d b, sic per hypothesin a e ad e c.* Et *sicut igitur per undecimam quinti, a e ad e c: sic a d e triangulum, ad triangulum b d e.* Sicut *rursum per eandem primam sexti, a e basis, ad basin*

Partis secũdę demõstratio.





e c: sic idem triangulum a d e, ad triangulum c e d. Et proinde sicut a d e triangulũ ad triangulum b d e: sic idem triangulum a d e, ad triangulum c e d, per undecimã ipsius quinti. Idem ergo triangulum a d e, ad ipsa b d e & c e d triangula, eandem habent rationem. Ad quæ autem triangula idem triangulum eandem habet rationem: & ipsa sunt inuicem æqualia, per nonam eiusdem quinti. Aequum est igitur b d e triangulum, ipsi c e d triangulo. Quæ cùm in eadem sint basi d e, & ad easdem partes: & in eisdem quoq; sunt parallelis, per trigesimamnonam primi, parallela est itaque d e, ipsi b c. Si trianguli ergo ad unum latus: &c. ut in theoremate. Quod demonstrare oportebat.

Θεώρημα γ, Πρότασις γ.

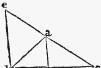
Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν: τὰ τῆς βάσεως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς: ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Theorema 3, Propositio 3.

SI trianguli angulus bifariam secetur, dispescens autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eã dem habebũt rationem, reliquis ipsius triãguli lateribus. Et si basis segmẽta eandem habuerint rationem, reliquis ipsius trianguli lateribus: à vertice ad basin coniuncta recta linea, bifariam dispescit trianguli angulum. 3

ORONTIVS. ¶ Sit datum a b c triangulum, cuius angulus b a c bifariam secetur, per nonam primi: recta quidem a d, basin ipsam b c itidem secante in pũcto d. Aio quod b d, ad d c se habet: ut b a, ad a c. Per datum enim punctum b, datæ rectæ lineæ a d, parallela ducatur b e, per trigesimamprimam primi: producatúrque c a recta, per secundum postulatum, donec cõuenerit in punctum e cum ipsa b e, feceritque triangulum b e c. Conueniet autem c a cum b e, per quintum postulatum: propterea quòd anguli e b c & b c e, duobus rectis sunt minores, nam angulus e b c, exteriori & opposito a d c, per uigesimamnonam primi est æqualis: & duo anguli a d c & d c a trianguli d a c, binis rectis minores existunt, per ipsius primi decimamseptimam. His ita constructis, quoniam in parallelas a d & b e, recta incidunt a b & e c: æqualis est angulus a b e alterno b a d, necnon interior a e b exteriori & ex opposito d a c, per uigesimamnonam primi. Atqui b a d & d a c anguli, sunt inuicem per hypothesin æquales: duo itaque anguli a b e & a e b, æquales proinde sunt adinuicem

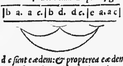
Figuræ compositio.



Primæ partis ostensio.

adinuicem. hinc latus a b, lateri a e, per sextam primi, æquale. Trianguli demũ b e c, ad latus b e acta est parallelus a d, per constructionem: secat igitur a d proportionaliter ipsius trianguli latera, per secundam huius sexti, sicut quidem b d, ad d c, sic e a, ad a c. Ipsi porrò e a, ostensa est æqualis b a: æquales autem ad eandem, eandem habent rationem, per septimam quinti. Et sicut igitur b d, ad d c: sic b a, ad a c. ¶ Sit autem ut b d ad d c, sic b a ad a c: & connectatur a d recta, per primum postulatum. Dico uersa uice, quòd a d recta bifariam discindit angulum b a c. Constructa enim ut prius figura, quoniam ex hypothesi receptum est, sicut b d ad d c, sic b a ad a c. sed per secundam huius sexti, sicut b d ad d c, sic e a ad a c: in triangulo enim b e d, ad latus b e acta est parallelus a d. Binæ itaque rationes, b a in quã ad a c, & e a ad a c, eidem rationi b d ad d c sunt eædem: & propterea eædem adinuicem, per undecimam quinti. Et sicut igitur b a ad a c, sic e a, ad eandem a c. Quæ autem ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt adinuicem, per nonam ipsius quinti. Aequalis est itaque b a, ipsi e a: & proinde qui ad basin b e sunt anguli, adinuicẽ sũt æquales, per quintam primi, hoc est, a b e ipsi a e b. Et quoniam parallela est a d ipsi b e, & in eas incidunt a b & e c lineæ rectæ: æqualis est angulus b a d alterno a b e, necnon & exterior angulus d a c interiori & ex opposito a e b, per uigesimamnonam ipsius primi. Ostensum est autem, angulos a b e & a e b fore inuicem æquales: quæ uerò æqualibus æqualia sunt, ea quoque inuicem sunt æqualia, per primæ communis sententiæ interpretationem. Aequalis est igitur angulus b a d, angulo d a c. Et proinde angulus b a c, sub a d recta bifariam discinditur. si trianguli itaque angulus bifariam secetur: & quæ sequuntur reliqua. Quod demonstrandum susceperamus.

Pars secunda theorematis, conuersa primæ.



Θεώρημα δ, πρότασις δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

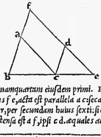
Theorema 4, Propositio 4.

4 Aequiangulorum triangulorum, proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos: & similis sunt rationis, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur.

ORONTIVS. ¶ Sint bina triangula inuicem æquiangula, a b c & d c e: sitq; angulus a b c æqualis angulo d c e, & b a c angulus ipsi c d e, atque a c b ipsi angulo d e c. Aio latera ipsorum triangulorum a b c & d c e quæ circum æquales angulos, fore proportionalia: & quæ angulis subtenduntur æqualibus, eiusdẽ esse rationis, sicut quidem a b ad b c, sic d c ad c e, sicútque b c ad c a, sic c e ad e d, atque sicut c a ad a b, sic e d ad d c. Constituãtur enim in directum bina eorũdem triangulorum latera, ea scilicet quæ æqualibus subtenduntur angulis: utpote b c latus, in directum ipsius c e. id autem efficietur, cùm anguli b c d & d c e, binis rectis fuerint æquales, per decimamquartam primi.

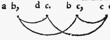
Constructio figuræ.

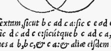
Producantur insuper b a & e d latera in rectum & continuum ad partes a & d, per secundum postulatum: donec tandem in unum congrediantur punctum. Id enim per quintum postulatum euenire necessum est: propterea quòd anguli a b c & a c b, duobus rectis per decimamseptimam primi sunt minores, & angulus d c e angulo a c b per hypothesin est æqualis. Ex quo fit, ut anguli a b e & d e b eisdem angulis a b c & a c b sint æquales: & proinde binis rectis itidem minores. Et quoniam ex hypothesi angulus d c e interiori & opposito ad easdem partes a b c est æqualis angulo, necnon & a c b ipsi d e c itidem interiori & opposito æqualis: parallela est igitur c d ipsi b f, & a c ipsi f e, per uigesimamoctauam primi. Parallelogrammum est itaque a c d f: & proinde a c latus opposito f d æquale, similiter & a f ipsi c d, per trigesimamquartam eiusdem primi.



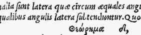
Demonstratio præblematis.

His ita constructis, quoniam trianguli b f e, ad latus f e, acta est parallela a c: secat igitur a c, ipsius trianguli latera proportionaliter, per secundam huius sexti: sicut quidem b a & a f, sic b c, ad c e. & æqualis ostensa est a f, ipsi c d. æquales autem ad eandem, eandem habent rationem: & ea dem ad æquales, per septimam quinti. Et sicut igitur a b ad d c: sic b c, ad c e. Et permutatim insuper, sicut a b, ad b c, sic d c ad c e, per decimamsextam eiusdem quinti. Item quoniam ipsius triãguli b f e, ad latus b f, acta est parallela c d: secat rursum eadem c d, eiusdem trianguli latera proportionaliter, per eandem secundam huius sexti: sicut quidem b c ad c e, sic f d ad d e. Ipsi porrò f d, ostensa est æqualis a c. Et sicut igitur b c, ad c e: sic c a ad e d, per eandem septimam quinti. atque rursum permutatim, per ipsius quinti decimãsextam, sicut b c ad c a: sic c e ad e d.





Iam itaque ostensum est, sicut a b ad b c sic d c ad c e: sicútque b c ad c a, sic & c e ad e d. Sunt igitur tres magnitudines a b, b c, & c a: & aliæ eisdem æquales numero d c, c e, et e, d, cum duabus sumptis in eadem ratione. Et ex æqua igitur ratione, erit sicut b a, ad a c: sic etiam c d, ad d e, per uigesimamsecundam quinti. Aequiangulorum itaq; triangulorum a b c et d c e, proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos: et similis sunt rationis, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur. Quod demonstrandum fuerat.



Θεώρημα δ΄, Πρόθεσις δ΄.

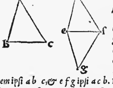
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Theore-

Theorema 5, Propositio 5.

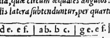
Si duo triangula, latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur.

ORONTIVS. ❡ *Hæc est conuersa præcedentis, quæ non potuit eadem figura, uel deductione (quemadmodum secunda & tertia obseruauimus propositione) demonstrari. Sint igitur bina triágula a b c & d e f, habentia latera proportionalia: sicut quidem a b ad b c, sic d e ad e f, sicut prætera b c ad c a, sic e f ad f d, sicut denique c a ad a b, sic f d ad d e. Aio triangula ipsa a b c & d e f, fore æquiangula, & æquales angulos cõprehendere, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur: utpote, angulum a b c, æquum fore angulo d e f, & angulum b c a angulo e f d, atque angulum b a c angulo e d f. Ad datam enim rectam lineam e f, & data illius puncta e & f, datis angulis rectilineis a b c & a c b, æquales anguli constituantur, per uigesimã tertiam primi: f e g quidem ipsi a b c, & e f g ipsi a c b.*



Constructio figuræ.

Et quoniam anguli a b c & a c b, per decimã septimam ipsius primi, binis rectis sunt minores: & f e g itaque ac e f g anguli, binis itidem rectis minores erunt. Conuenient ergo tandem e g & f g rectæ lineæ, per quintum postulatum: conueniant ad punctum g. triangulum erit igitur e f g: & reliquus angulus qui ad g, reliquo qui ad a æqualis, per corollariũ trigesimæ secundæ eiusdem primi, una cum ipsa tertia communi sententia. Aequiangula sunt itaque a b c & e f g triangula, & proinde latera ipsorum proportionalia, quæ circum æquales angulos: & similis sunt rationis, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur, per quartam huius sexti. Est igitur sicut a b ad b c, sic g e, ad e f: sicut porrò a b ad b c, sic est per hypothesin d e ad ipsam e f. Et sicut igitur d e ad e f, sic g e ad eandem e f, per undecimam quinti. Quæ autem ad eandẽ, eandem habent rationem, æquales sunt adinuicem, per nonam quinti: æqualis est igitur d e, ipsi e g. Haud dissimiliter ostendemus d f, ipsi f g æqualem. eadem enim e f ad utranque, tum ex hypothesi, tum ex quarta huius sexti, eandem habet rationem: nempe quam b c ad c a. Ad quas porrò magnitudines, eadem magnitudo eandem habet rationem, ipsæ sunt æquales, per eandem nonam quinti. Et quoniam æqualis est d e, ipsi e g, utrique autẽ communis e f: binæ itaque d e & e f trianguli d e f, duabus f e & e g trianguli e f g sunt æquales altera alteri, & basis d f, basi f g æqualis. Angulus igitur d e f, angulo f e g sub æqualibus rectis comprehenso, per octauam primi, est æqualis. Nec dissimili uia demonstrabimus, angulum e d f, angulo e g f, æqualem atq; e f d, ipsi e f g. semper enim ipsorum triangulorum bina latera, binis lateribus alterum alteri ostendẽtur æqualia: necnon & basis, basi æqualis. Et contentos



Ostensionis deductio.

Resolutio theorematis.

&. propterea

Propterea ſub æqualibus lineis rectis angulos æquales habebunt, per eandem octauam primi. His præoſtēſis, *quoniam angulus d e f, æqualis eſt angulo f e g, eidem quoque angulo f e g, æquus eſt per conſtructionem angulus a b c.* Duo *itaque anguli a b c & d e f, eidem angulo f e g ſunt æquales: & proinde æqua les adinuicem, per primam communem ſententiam.* Pari *diſcurſu angulus a c b, angulo d f e: necnon & b a c angulus, ipſi e d f angulo concludetur æqualis.* Ae*quiangula ſunt itaque a b c, & d e f triangula.* Si *bina ergo triangula: &c. ut in theoremate.* Quod *oportuit oſtendiſſe.*

Θεώρημα ς, Πρόθεσις ς

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον: ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

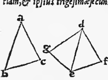
Theorema 6, Propoſitio 6.

SI bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, circum æquales angulos latera proportionalia: æquiangula erunt triangula, & æquales habebūt angulos, ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur.

Figuræ compoſitio.

ORONTIVS. *Sint rurſum bina triangula a b c & d e f, habentia unum angulum uni angulo æqualem, utpote eum qui ad b ei qui ad e: atque circum eoſdem æquales angulos latera proportionalia, ſicut a b ad b c, ſic d e ad e f.* Dico *ipſa triangula a b c & d e f fore æquiangula: & angulum b a c angulo e d f, atq; a c b, ipſi d f e reſpondenter coæquari.* Ad *datam enim rectam lineam d e, datuque illius punctum e, utrique æqualium qui ad b & e ſunt angulorum: æqualis angulus conſtituatur d e g, per uigeſimamtertiam primi: & per eandem, ad punctum d, ipſi angulo b a c: æqualis rurſum conſtituatur angulus e d g.* Et *quoniā duo anguli a b c & b a c, ſunt minores duobus rectis, per decimamſeptimam ipſius primi: erunt & ipſi anguli d e g & e d g binis itidem rectis minores.* Con*uenient ergo tandem d g & e g rectæ in continuum productæ, per quintum poſtulatum: ſit illarum concurſus in puncto g.* Triangulum *erit itaque d e g: & reliquus angulus qui ad g, reliquo qui ad c æqualis, per tertiam communem ſententiam, & ipſius trigeſimæſecundæ primi corollarium.* Aequiangula *ſunt itaque a b c, & d e g triangula: & proinde latera ipſorū ꝓportionalia, ſimiliſque rationis erūt quæ æqualibus angulis latera ſubtēdūtur, per quartā huius ſexti.* Et *ſicut igitur a b, ad b c: ſic d e ad e g.* Sicut *porro a b, ad b c: ſic per hypotheſin d e, ad e f.* Et *ſicut igitur d e ad e f, ſic ipſa d e ad e g: quæ enim eidem ſunt eædem rationes, & adinuicem ſunt eædem, per undecimā quinti.* Eadem *itaque d e, ad ipſas e f & e g eandem habet rationem: æqualis eſt igitur e f ipſi e g, per nonā ipſius quinti.*

Deductio theorematis.



6

quinti. His ita præostensis, quoniã æqualis est e f ipsi e g, utrique autem cõmunis d e: binæ itaq; d e & e f triãguli d e f, duabus d e & e g trianguli d e g, sunt æquales altera alteri: & æquos adinuicem continent angulos, per cõstructionẽ. Basis ergo d f, basi d g est æqualis, & totũ triangulũ toti triãgulo æquale: reliqui insuper anguli reliquis angulis æquales sub quibus æqualia subtendūtur latera, per quartam primi. Aequalis est igitur angulus e d f ipsi e d g, atq; is qui ad f ei qui ad g, æqualis. Sed eidẽ angulo e d g, æqualis est per cõstructionẽ angulus b a c: eidem insuper qui ad g, is qui ad c itidem æqualis. quæ autem eidem æqualia, & adinuicẽ sunt æqualia per primã cõmunem sententiã. Aequus est igitur angulus e d f, ipsi b a c: necnon & d f e, ipsi angulo a c b. Reliquũ porrò angulũ d e f, reliquo a b c, ex hypothesi recepimus æqualem. Aequiãgula itaque sunt a b c et d e f triangula: et æquales habent angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur. Ergo si bina triangula: et quæ sequuntur reliqua. Quod demonstrare fuerat operæpretium.

Demonstrationis resolutio



Θεώρημα ζ, Πρότασις ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς: ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Theorema 7, Propositio 7.

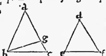
7 Si bina triãgula vnũ angulũ vni angulo æqualẽ habuerint, circũ autẽ alios angulos latera proportionalia, reliquorũ verò vtrunque simul aut minorẽ aut nõ minorẽ recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

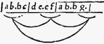
ORONTIVS. ¶ Sint bina triãgula a b c & d e f, unũ angulũ uni ãgulo, utpote, eũ qui ad a ei qui ad d æqualẽ habẽtia: et circũ alios angulos, scilicet a b c et d e f, latera proportionalia, sicut quidẽ a b ad b c, sic d e ad e f: reliquorũ porrò qui ad c et f sunt angulorum, uterque primùm sit recto minor. Aio a b c et d e f triangula, fore æquiangula: et angulum a b c æquum esse angulo d e f, atque reliquum a c b reliquo d f e itidẽ æqualẽ. In primis enim, uel angulus a b c æqualis est angulo d e f, uel eidẽ inæqualis. Si æqualis fuerit a b c ipsi d e f, reliquus a c b reliquo d f e, per corollariũ trigesimæsecũdæ primi, & tertiã cõmunem sententiam, erit æqualis. & proinde ipsa triangula a b c & d e f æquiangula. Quòd si angulus a b c, non fuerit æqualis ipsi d e f: alter eorũ, reliquo maior erit. Esto (si possibile fuerit) a b c ãgulus, ipso d e f ãgulo maior: & ad datã rectã lineam a b, & datum

Prima theorematis, siue hypothesis Pars.

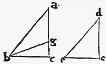
datũ in ea punctũ b: ipsi angulo d e f æqualis angulus constituatur a b g, per uigesimãtertiã primi. producatúrq; b g in latus a c: cùm enim angulus a b c, datus sit maior angulo d e f, cadet recta b g inter a b & b c latera. His ita cõstructis, quoniã æqualis est angulus qui ad a ei qui ad d, & qui sub a b g ei qui sub d e f æqualis: reliquus igitur ãgulus a g b, reliquo d f e per corollariũ 32. primi, et tertiã cõmunẽ sententiã erit æqualis. Et ꝓpterea a b g triãgulũ, ipsi d e f triãgulo æquiãgulũ. Hinc per quartã huius sexti ꝓportionalia erũt latera quæ circũ æquales ãgulos: sicut quidẽ d e ad e f, sic a b ad b g. sicut porrò d e ad e f, sic receptũ est a b ad b c. Et sicut igitur a b ad b c, sic a b ad b g, per 11. quĩti. Eadẽ itaq; a b, ad utrãq; ipsarũ b c et b g, eãdem habet rationem: æqualis erit igitur b c ipsi b g per 9 ipsius quinti. Hinc per 5 primi, angulus b c g, angulo b g c erit æqualis. Angulus porrò b c g, minor recto supposit⁹ est: et b g c ꝓpterea angulus, recto minor erit. Et quoniã angulus qui ad f recto minor est, & ei æqualis est a g b, & b g c itidẽ recto minor, (uti nunc ostensũ est) duo itaq; anguli b g a et b g c, à recta b g super a c incidente causati, duobus rectis erunt minores: contra 13 primi. Nõ est igitur a b c angulus, maior angulo d e f. haud dissimiliter ostendetur, ꝙ neque minor. Aequalis igitur est angulus a b c, ipsi d e f. Hinc reliquus qui ad c, reliquo qui ad f (uti supra) cõcludetur æqualis: & triãgula consequenter a b c, & d e f, inuicẽ æquiãgula. ¶ Sed esto simul uterq; eorũ qui ad c & f sunt angulorũ, nõ minor recto: hoc est, aut uterque rectus, uel uterq; recto maior. Si uterq; rectus extiterit (cũ recti omnes per quartũ postulatum sint adinuicem æquales) statim cõcludetur propositionis intentum.

Demõstratio eiusdem primæ partis, ab impossibili.





Secunda pars theorematis, siue hypothesis differẽtia.



Quòd si uterque fuerit recto maior: aio nihilominus triãgula a b c, & d e f esse inuicẽ æquiãgula. Constructis nanque (ueluti supra) figuræ partibus: haud dissimiliter ostendemus, b c atque b g latera, esse inuicem æqualia: & angulum propterea b c g, angulo b c g per quintam primi respondenter coæquari. Et quoniam angulus b c g maior est recto: & eodem recto maior erit angulus b g c. Trianguli itaque g b c, duo anguli b c g, & b g c binis rectis erunt maiores: quod per decimãseptimam primi est impossibile. Nõ est igitur a b c angulus, maior angulo d e f: neque eodem angulo minor. Aequalis est ꝓpterea angulus a b c, ipsi d e f: & reliquus a c b, reliquo d f e consequenter æqualis, ueluti suprà deductum est. Aequiangula sunt igitur a b c & d e f triangula: & æquales habent angulos, circum quos proportionalia sunt latera. Quod ostendendũ receperamus.

Θεώρημα η, Πρότασις η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Theorema

Theorema 8, Propositio 8.

SI in triangulo rectangulo ab angulo, recto in basin perpendicularis agatur: quę ad perpendicularem triangula, similia sunt toti, & adinuicem.

ORONTIVS. Esto rectangulum triangulum a b c, habens angulũ qui sub b a c rectum: & à dato puncto a, super datam rectam lineam b c perpendicularis deducatur a d, per duodecimam primi. Cadet enim huiuscemodi perpendicularis, intra datum a b c triangulum: ipsúmque in bina diuidet triangula. Si enim incideret extra, producto b c latere usque ad ipsam perpendicularem, triangulum efficeretur, cuius exterior angulus minor esset interiore & ex opposito, nempe acutus recto, contra decimamsextam primi. Neque in alterutrum laterum aut a b, ut a c poterit coincidere: duo enim anguli eiusdem trianguli non essent binis rectis minores, contra eiusdem primi decimamseptimam. Cadit igitur intra a b c triangulum. Aio itaque a b d & a d c triangula, toti a b c, atque inuicem fore similia. In primis quòd triangulum a b d, simile sit toti a b c: in hunc ostenditur modum. Angulus enim a d b, æquus est angulo b a c, per quartũ postulatum, nempe rectus recto: & angulus qui ad b, utrique triangulo communis. Ergo reliquus a c b, reliquo b a d, per corollarium trigesimæsecundæ primi, & tertiam communem sententiam est æqualis. Aequiangula sunt itaque a b c & a b d triangula: & proinde quæ circum æquales angulos sunt latera, inuicem proportionalia, per quartam huius sexti. Sicut igitur b c ad c a, trianguli a b c: sic b a ad a d, trianguli a b d. Sicut præterea c a ad a b, ipsius a b c triãguli: sic a d ad d b, ipsius a b d trianguli. Sicut demum c b ad b a, eiusdem trianguli a b c: sic a b ad b d, eiusdem trianguli a b d. Simile est itaque triãgulum a b d, toti a b c triangulo: per primam huius sexti diffinitionem. Haud dissimili uia ostendemus, triangulũ a d c, ipsi toti a b c fore simile. Rectus enim angulus a d c, recto b a c, per quartum æquatur postulatum: & is qui ad c est angulus, utrique rursum triangulo communis. reliquus ergo d a c angulus, reliquo a b c (ueluti suprà deduximus) est æqualis. Aequiangula itaque sunt a b c & a d c triangula. Hinc per quartam huius sexti, proportionalia erunt latera quæ circum æquales sunt angulos. sicut quidem b c ad c a, trianguli a b c: sic a c ad c d, trianguli a d c. sicut rursum c a ad a b, ipsius a b c trianguli: sic c d ad d a, ipsius a d c trianguli. Sicut præterea c b ad b a, eiusdem trianguli a b c: sic c a ad a d, eiusdẽ trianguli a d c. simile est igitur, a d c triangulum, toti a b c: per eandem primam diffinitionem huius sexti. Reliquum est, demonstrare quòd ipsa a b d & a d c triangula similia sunt adinuicem. Id autem ex supradictis ostensionibus, haud difficile colligemus. Angulus enim b a d, angulo qui ad c præostensus est æqualis: & is qui ad b, ipsi d a c. reliqui autem sunt recti, utpote a d b & a d c anguli: & proinde æquales adinuicem, per idem quartum postulatum. Aequiangulum est itaque a b d triangulum, ipsi triangulo a d c. Et sicut igitur a c ad c d, sic b a ad a d.



Nota de casu ipsius perpendicularis.

Quòd triangulum a b d, simile sit toti a b c.

Quòd eidem triangulo a b c, simile sit a d c triangulum.

Quòd a b d, & a d c triangula, sunt adinuicem similia.

& iij. sicut

ſicut prætereà c d ad d a, ſic a d ad d b. ſicut denum c a ad a d, ſic a b ad b d. Proportionalia nanque ſunt latera, quæ circum æquales angulos: per ſæpius allegatam quartam huius ſexti. Triangula itaque a b d & a d c, ſimilia ſunt adinuicem: per eandem primam huius ſexti diffinitionem. Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto: &c. ut in theoremate. Quod oportuit demonſtraſſe.

¶Corollarium.

¶Et quoniã oſtenſum eſt ſicut c d ad d a, ſic a d ad d b: ſicut inſuper c b ad b a, ſic a b ad b d: ſicútque b c ad c a, ſic a c ad c d. Proinde manifeſtum eſt, quod in triangulo rectangulo deducta ex angulo recto in baſin perpendicularis, eſt media proportionalis inter ipſius baſis ſegmenta: & unumquodque prætereà laterum rectum continentium angulum, medium itidem proportionale eſt inter baſin & ſegmentum, quod cum ipſo congreditur latere.

Πρόβλημα α, Πρόθεσις θ.

Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

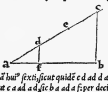
Problema 1, Propoſitio 9.

Data recta linea, ordinatam partem abſcindere.

Ordinata pars quid.

DORONTIVS. ¶Ordinatam partem hic uocat Euclides, quæ ab ordinato aliquo denominatur numero, & quota pars integræ magnitudinis ab ipſis nuncupatur arithmeticis: uti ſecunda ſiue dimidia pars quæ à binario, tertia quæ à ternario, & quarta quæ ab ipſo quaternario numero denominatur. Sit igitur data linea recta a b: à qua ſit operæpretium ordinatam aliquam, utpote tertiã abſcindere partem. A dato itaque puncto a, recta quædam linea producatur a c, contingentem quiſub b a c cum eadem efficiens angulum. Ipſius porrò a c liberum aliquod punctum uerſus a ſuſcipiatur: ſitque illud d. Secentur deinde

Problematis exequutio



ipſi a d æquales d e & e c, per tertiã primi: & connectatur recta b c, per primum poſtulatum. Tandem per punctum d, ipſi b c parallela ducatur d f, per trigeſimamprimam eiuſdem primi. Triangulum eſt itaque a c b, & ad latus c b acta eſt parallela d f ſecat igitur d f, ipſius triãguli latera ꝓportionaliter, per ſecũdã hui⁹ ſexti, ſicut quidẽ c d ad d a, ſic ſic b f ad f a. Et à cõpoſita igitur ratione, ſicut c a ad a d, ſic b a ad a f: per decimãoctauã quinti. Tripla eſt autẽ c a ipſius a d: & a b igitur ipſius a f itidem erit tripla, & proinde a f tertia pars ipſius a b. Data itaque recta linea a b, ordinatam partem (nempe tertiam) abſcidimus. Quod facere oportebat.

Πρόβλημα β, Πρόθεσις ι.

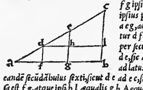
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Proble-

Problema 2, Propositio 10.

10 DAtam rectam lineam non sectam, datæ rectæ linæ sectæ similiter secare.

ORONTIVS. ¶Sit rursum a b data & insecta linea recta, a c uerò utcunq; secta in pũctis d & e. Cõponantur autẽ a b & a c datæ rectæ lineæ, ad cõtingẽtem angulũ qui sub b a c: & cõnectatur recta b c, per primũ postulatũ. Per pũcta cõsequenter d & e, ipsi b c, parallelæ ducãtur rectæ lineæ d f & e g: itidem & per punctũ d, ipsi a b parallela ducatur d h l, per trigesimãprimã primi, diuidens e g in puncto h. Parallelogrãma sunt itaque, d g & h b: & æqualis propterea f g ipsi d h, & g b ipsi h l, per trigesimãquartã ipsius primi. His ita præmissis, quoniã triãguli a e g, ad latus e g acta est parallela d f: secat igitur d f ipsius triãguli latera proportionaliter, per secundã huius sexti. Et sicut igitur a d ad d e, sic a f ad f g. Insuper quoniã triãguli d c l, ad latus c l acta est parallela e h: fit rursum per eandẽ secũdã huius sexti, sicut d e ad e c, sic d h ad h l. Ipsi uerò d h æqualis ostensa est f g, atque ipsi h l æqualis g b. Aequales porrò ad easdẽ, eandẽ habent rationẽ, & eædẽ ad æquales: per septimã quinti. Sicut itaque d e ad e c, sic f g ad g b. Præostensum est autẽ, sicut a d ad d e, sic a f ad f g. Et sicut igitur a d ad d e, sic a f ad f g: sicútque d e ad e c, sic f g ad g b. Data ergo linea insecta a b datæ rectæ lineæ utcũq; sectæ a c, similiter secatur. Quod faciẽdũ receperamus.



Problematis ostensio.

Πρόβλημα γ, Πρόθεσις. ια.

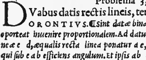
ΔΥο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Problema 3, Propositio 11.

11 DVabus datis rectis lineis, tertiã proportionalẽ inuenire.

ORONTIVS. ¶Sint datæ binæ rectæ lineæ, a b & c d: quibus tertiã oporteat inuenire proportionalem. Ad datum itaque punctum a, datæ rectæ lineæ c d, æqualis recta linea ponatur a e, per secundam primi, contingentem qui sub e a b efficiens angulum. Et ipsis a b & a e in continuum rectúmque ad, f & g puncta productis: utrique ipsarum c d & a e æqualis abscindatur b f, per tertiam ipsius primi: connectatúrque recta b e, per primum postulatũ. Per trigesimam deinde primam eiusdem primi: per datum punctum f, ipsi b e parallela ducatur f g, conueniens cum a e ad punctum g. Conuenient enim tandem per quintum postulatum: propterea quod anguli e a b & a b e triãguli a e b, sunt per decimamseptimã primi binis rectis minores, & ipsi angulo a b e interior, & ad easdem partes qui ad f per uigesimamnonã ipsius prim i æqualis. His ita constructis, quoniam trianguli a g f ad latus f g acta est parallela b e: secat igitur b e ipsius a g f trianguli latera proportionaliter, per secundam huius sexti: sicut quidem a b ad b f, sic a e e g. Aequalis porrò est c d utrique ipsarum a e & b f, per constructionem

Constructio figuræ.



Demõstratio problematis.

&

& æquales ad eandē,eãdem habent rationem,& eadem ad æquales,per ſeptimã quinti. Et ſicut igitur a b ad c d,ſic eadem c d ad e g. Datis itaque binis rectis lineis a b & c d,tertia proportionalis inuenta eſt e g. Quod oportuit feciſſe.

Πρόβλημα δ´, Πρόθεσις ιβ.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

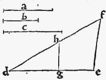
Problema 4, Propoſitio 12.

Tribus datis rectis lineis,quartam proportionalē inuenire.

ORONTIVS. Sint datæ tres lineæ rectæ a,b,c,quibus oporteat quartā inuenire proportionalem. Conſtituātur itaque binæ quædam rectæ lineæ d e,atq; d f,cōtingentem qui ſub e d f angulū efficiētes. ſecetúrq; per tertiā primi,ipſi a æqualis d g,ipſi uerò b æqualis g e,et ipſi c æqualis d h. Et cōnexa g h,per primū poſtulatū:ducatur e f ipſi g h paralle la,per trigeſimãprimã ipſius primi. Per ſecundū tādem poſtulatū ipſæ d h & e f in cōtinuum rectúmq; producātur:donec cōueniāt ad punctū f. Cōcurrent enim tādem:quēadmodū ex præcedenti potes elicere demōſtratione. His itaque modū præparatis,quoniā triāgulum eſt d f e,et ad latus e f acta eſt parallela g h:proportionalia itaque ſunt reliquorū laterū ſegmenta,per ſecundam huius ſexti,ſicut d g ad g e,ſic d h ad h f. Ipſi porrò d g æqualis eſt a, & b ipſi g e,atque c ipſi d h æqualis,per conſtructionem. Aequales autem,ad eandem eandem habēt rationem,& eadem ad æquales,per ſeptimam quinti. Et ſicut igitur a ad b, ſic c ad h f. Tribus itaq; rectis lineis datis,a,b,c:quartam inuenimus proportionalem h f. Quod faciendum fuerat.

Figuræ præparatio.

Demonſtrationis reſolutio



Πρόβλημα ε, Πρόθεσις ιγ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν,μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

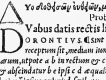
Problema 5, Propoſitio 13

Duabus datis rectis lineis, mediā proportionalē inuenire.

ORONTIVS. Sint datæ binæ rectæ lineæ,a b & c d:inter quas receptum ſit,mediam inuenire proportionalem. Producatur ergo altera earum,utpote a b in rectum & continuum uerſus e,per ſecundum poſtulatum: & abſcindatur b e ipſi c d æqualis,per tertiam primi. Et diuiſa a e bifariā,per decimā ipſius primi:deſcribatur ad alterutrius partis interuallum ſemicirculus a f e,per tertiū poſtulatū. A pūcto deniq; b, perpēdicularis excitetur b f, per undecimā primi:& cōnectantur a f & f e lineæ rectæ, per primū poſtulatum. His cōſtructis,quoniā triāguli a f e angulus qui ad f eſt in ſemicirculo,is propterea rectꝰ eſt,per trigeſimãprimã tertij. Rectāgulū eſt itaq; a f e triangulū,& ab angulo recto qui ad f in baſin a e perpendicularis demittitur f b: eſt igitur ipſa perpendicularis f b,media proportionalis interea b & b e ipſius baſis

Conſtructio figuræ.

Summaria problematis oſtenſio.



basis segmenta, per primam partem corollarij octauæ huius sexti. Est igitur ut a b ad b f, sic b f ad b e. Ipsi porrò b e æqualis est c d, per constructionem: & æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales, per septimã quinti. Et sicut igitur a b ad b f, sic b f ad c d. Binis itaq; rectis lineis datis, a b & c d, media proportionalis inuenta est b f. Quod oportebat facere.

Θεώρημα θ, Πρόθεσις ιδ.

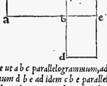
Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Theorema 9, Propositio 14.

4 Aequalium & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum: reciproca sunt latera, quæ circũ æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium, reciproca sũt latera, quæ circum æquales angulos, ea quoque sunt æqualia.

ORONTIVS. *¶ Sint bina parallelogramma inuicem æqualia, a b c, & d b e, angulum qui sub a b & b c, ei qui sub d b & b e continetur æqualem habentia. Dico ipsorum parallelogrammorum a b c & d b e latera, quæ circum æquales angulos, fore reciprocè proportionalia: sicut quidem a b ad b e, sic d b ad b c. Constituantur enim a b & b e latera in directum: hoc autem fiet, cùm anguli a b c & c b e fuerint æquales duobus rectis, per decimam quartam primi. In directum quoque tunc erit d b ipsi b c, per eandem propositionem: anguli enim d b c & e b c, binis itidem rectis, per primam & secundam communem sententiam, erunt æquales.*

Pars prima theorematis.



Complcatur tandem c b e parallelogrammum: productis in continuum rectúmque datorum parallelogrammorum lateribus, per secundum postulatum. Cùm igitur a b c parallelogrammũ, æquale sit per hypothesin ipsi d b e parallelogrammo, & c b e aliud quoddam utrique comparabile parallelogrammum: erit proinde ut a b c parallelogrammum, ad parallelogrammum c b e, sic parallelogrammum d b e ad idem c b e parallelogrammum. Aequales enim magnitudines, ad eandem magnitudinem eandem habent rationem, per septimam quinti. Sicut porrò a b c parallelogrammum, ad parallelogrãmum c b e, sic per primã huius sexti, basis a b ad basin b e: sub eadẽ enim sũt altitudine, ipsa a b c & c b e parallelogramma. Et sicut igitur basis a b, ad basin b e: sic per undecimam quinti, d b e parallelogrãmum, ad parallelogrammũ c b e. Sicut rursum per eandem primam huius sexti, d b e parallelogrammũ, ad ipsum parallelogrãmum c b e: sic basis b d, ad basin b c. Et sicut igitur per ipsam undecimã quinti.

Eiusdẽ primæ partis ostẽsio



ti, a b ad b e, sic d b ad b c. Datorum itaque parallelogrammorum a b c & d b e, reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos: per secundã huius sexti diffinitionem. ¶ Sed esto ut qui ad b sunt anguli æquales sint adinuicem, & circum eosdem æquales angulos latera reciproce proportionalia, sicut a b ad b e, sic sic d b ad c. Aio uersa uice, quòd a b c parallelogrammum, æquum est ipsi d b e parallelogrammo. Receptum est enim ex hypothesi, ut a b ad b e, sic d b ad b c. sed sicut a b, ad b e: sic per primam huius sexti, parallelogrammum a b c, ad c b e parallelogrammum. Et sicut igitur a b c parallelogrammum, ad parallelogrammum c b e: sic per undecimam quinti, a b ad b c. Sicut rursum d b, ad b c: sic per eandem primam huius sexti, parallelogrammum d b c, ad c b e parallelogrammum. Et sicut igitur per ipsam undecimam quinti, a b c parallelogrammum, ad c b e parallelogrammum: sic parallelogrammum d b c, ad idem c b e parallelogrammum. Vtrunque igitur a b c & d b e parallelogrammum, ad idem parallelogrammum c b e habet eandem rationem: æquum est itaque a b c parallelogrammum, ipsi d b e parallelogrammo, per nonã ipsius quinti. Aequalium igitur, & unũ uni æqualem habentium angulũ parallelogrammorum: & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum fuerat.

Secũda pars theorematis, conuersa primæ.

| a b. b e | d b e. c b e | d b b c |

| a b c c b e. | a b. b e | d b. b c |

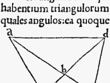
| a b c. c b e | d b b e | d b c. c b e |

Θεώρημα ι, Πρότασις ιε.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. Theorema 10, Propositio 15.

Aequalium & vnum vni æqualẽ habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum vnum vni angulum æqualem habentium triangulorum reciproca sunt latera, quę circũ æquales angulos: ea quoque sunt æqualia.

Prima theorematis pars.



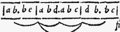
ORONTIVS. ¶ Sint bina & inuicem æqualia triãgula a b c & d b e, angulum qui sub a b & b c, ei qui sub d b & b e cõtinetur æquale habentia. Dico latera ipsorũ a b c & d b e triangulorũ, quæ circũ eosdem æquales sunt angulos, fore reciprocè proportionalia: sicut quidem a b ad b e, sic d b ad b c. Collocetur enim a b & b e latera in directũ, & d b

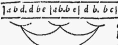
ipsi b c: quemadmodum præcedenti demonstratione, ex decimaquarta primi, de parallelogrãmorum deductum est lateribus. Connectatur denum recta a d, per primũ postulatum. Et quoniam per hypothesin, æquum est a b c triãgulum, ipsi triangulo d b e: & a b d aliud quoddã utriq; cõparabile triãgulum. Et sicut igitur a b d triãgulum ad triãgulum a b c, sic idẽ triãgulum a b d ad triangulum d b e: eadẽ enim magnitudo, ad æquales eandẽ habet rationẽ, per septimã quinti. Sicut porrò triãgulum a b d ad triangulũ d b e, sic per primã huius sexti, a b, ad b e. Et sicut igitur per undecimam quinti, a b ad b e, sic a b d triãgulum ad

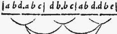


triãgulum a b c. Rursum, ut triãgulum a b d ad triãgulum a b c, sic per eandẽ primã huius sexti, d b ad b c. Ergo sicut a b ad b e, sic d b ad b c, per ipsam undecimam quinti. Triangulorum itaque a b c & d b e, latera quæ circum æquales angulos reciprocè sunt proportionalia: per secundam huius sexti diffinitionem. ¶ *Sed receptum sit, angulos qui a d b fore inuicẽ æquales, & quæ circũ eos dem æquales angulos latera reciprocè proportionalia: sicut a b ad b e, sic d b ad b c. Aio quòd a b c triangulum, æquum est ipsi d b e triangulo. Est enim ex hypothesi, sicut a b ad b e, sic d b ad b c. sed sicut a b ad b c: sic a b d triangulum ad triangulum d b e, per primam huius sexti. Et sicut igitur d b ad b c: sic per undecimam quinti, a b d triangulum, ad triangulum d b e. Sicut rursum d b ad b c: sic triangulum a b d ad triangulum a b c, per sæpius allegatam primam huius sexti. Et proinde sicut a b d triangulum, ad triangulum a b c: sic per undecimam ipsius quinti, idem a b d triangulum, ad triangulum d b e. Ad quas porrò magnitudines, eadem magnitudo eandem habet rationem: ipsæ per nonam eiusdem quinti, sunt æquales. Aequum est igitur a b c triangulum, ipsi triangulo d b e. Aequalium itaque & unum uni æqualem habentium angulum, & c. ut in theoremate. Quod oportebat demonstrare.*

Pars secũda, conuersa priɶ.







Θεώρημα ια, Πρόθεσις ις.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται. Theorema 11, Propositio 16.

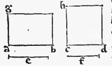
16

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis cõprehensum rectangulum, æquũ est ei, quod

ſub mediis continetur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquum fuerit ei, quod ſub mediis continetur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Primę partis demõſtratio.

ORONTIVS. ¶ *Sint datæ quatuor rectæ lineæ diſcontinuè proportionales, a b, c d, e, & f: ſicut a b ad c d, ſic e ad f. Aio quòd ſub extremis a b & f comprehenſum rectangulum, æquum eſt ei quod ſub medijs c d & e rectangulo continetur. A datis enim punctis a & c datarum linearum a b & c d, perpendiculares excitentur a g & c h, per undecimam primi: ſecetúrque a g æqualis ipſi f, & c h æqualis ipſi e, per tertiam primi propoſitionẽ: & ductis utrinque parallelis, per trigeſimam eiuſdem primi, compleantur g b, & h d parallelogramma. Et quoniam receptũ eſt ut a b ad c d, ſic e ad f. Ipſi porrò e æqualis eſt c h, & ipſi f æqualis a g, per conſtructionem: & æquales ad eandem, eandem habent rationem, per ſeptimam quinti. Eſt igitur ut a b ad c d, ſic c h ad a g. Parallelogrammorum itaque g b & h d, latera quæ circũ æquales ſunt angulos (utpote rectos qui ad a & c) reciprocè ſunt proportionalia. Aequũ eſt proinde g b parallelogrammum, ipſi h d parallelogrammo, per ſecundam partem decimæquartæ propoſitionis huius ſexti. Eſt autem g b parallelogrammum id quod ſub a b & f, parallelogrammum uerò h d id quod ſub c d & e continetur rectangulum: æqualis eſt enim c h ipſi e, & a g ipſi f, per conſtructionem. Comprehenſum itaque ſub extremis a b & f rectangulum, ei quòd ſub mediis c d & e continetur rectangulo, eſt æquale.*



Secũdæ partis conuerſæ prioris, oſtẽſio.

¶ Eſto nunc ut ipſum g b ſub extremis comprehenſum rectangulum æquum ſit h d rectangulo, quod ſub medijs c d & e continetur. Dico uerſa uice, quatuor ipſas rectas lineas fore inuicem proportionales. Eadem nanque manente conſtructione, quoniam g b eſt id quod ſub a b & a g, ipſum uerò h d id quod ſub c d & c h continetur rectangulum, per primam diffinitionem ſecundi: & e ipſi c h, atque f ipſi a g, per conſtructionẽ æqualis. Eſt itaq; g b id quod ſub a b & f, necnon & h d id quod ſub c d & e comprehenditur rectangulum. Sed id quod ſub a b & f comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei per hypotheſin quod ſub c d & e cõtinetur rectangulo. Aequum eſt igitur g b rectangulum, ipſi rectangulo h d: & angulus qui ad a angulo qui ad c æqualis, per quartum poſtulatum, nempe rectus recto. Aequalium porrò & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum, reciproca ſunt latera quæ circũ æquales angulos, per primam partem ipſius decimæquartæ huius ſexti. Et ſicut igitur a b ad c d, ſic c h ad a g. Ipſi porrò c h æqualis eſt e, & f ipſi a g, per ipſam conſtructionẽ: æquales præterea ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales, per ſeptimam quinti. Eſt igitur ut a b ad c d, ſic e ad f. Si quatuor itaque rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquum

eſt

est ei quod sub medijs, & econuerso. Quod erat ostendendum.

Θεώρημα ιβ, Πρότασις. ιζ.

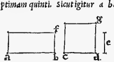
Ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Theorema 12, Propositio 17.

17 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, æquum est ei quod à media fit quadrato. Et si quod sub extremis continetur rectangulum, æquum fuerit ei quod à media fit quadrato: ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Pars prima theorematis.

ORONTIVS. *Sint tres rectæ lineæ continuè proportionales a b, c d, & e: sicut a b ad c d, sic c d ad e. Dico quòd sub a b & e comprehensum rectangulum, æquum est ei quod à media c d fit quadrato. Describatur enim ex a b & b f quæ sit æqualis ipsi e, rectangulum a f, per undecimam, & tertiā, atque trigesimamprimam primi: ex c d uerò, quadratum c g, per ipsius primi qudragesimamsextam. Aequalis erit igitur d g, ipsi c d, per ipsius quadrati diffinitionem: & æquales ad eandem, eandem habent rationem, per septimam quinti. Sicut igitur a b ad c d, sic d g ad e. Quatuor itaque rectæ lineæ a b, c d, d g, & e, sunt discontinuè proportionales. Cōprehensum ergo sub extremis rectangulum, æquum est ei quod sub mediis rectangulo continetur: per primam partem antecedētis decimæsextæ propositionis. Sed rectangulum a f, est id quod sub a b & e, nam b f est æqualis ipsi e, per constructionem: rectangulum autem c g, id quod ex c d quadratum. Quod igitur sub extremis a b & e comprehenditur rectangulum, æquum est ei quod à media c d fit quadrato.*



Secūda pars conuersa primæ.

Sed detur, ut id quod sub a b & e continetur rectangulum, æquum sit ei quod ex c d fit quadrato. Aio respondenter fore sicut a b ad c d, sic c d ad e. Eisdem nanque ueluti suprà cōstructis: quoniam id quod sub a b & e continetur rectangulum, æquum est ei per hypothesin quod ex c d fit quadrato. Sed ei quod sub a b & e continetur rectangulo, æquum est rectangulum a f (æqualis siquidē est b f ipsi e, per constructionem) & c g, id quod ex c d fit qudratum. Aequum est igitur a f rectangulū, ipsi quadrato c g. Quadratum porrò c g, sub duabus rectis lineis c d & d g, per primā diffinitionem secundi continetur. Quatuor itaque sunt rectæ lineæ a b, c d, d g, & b f: & quod sub extremis a b & b f rectangulum continetur, æquum est ei quod sub mediis c d & d g comprehenditur rectangulo. Proportionales itaque sunt eædem quatuor rectæ lineæ, per secundam partem ipsius antecedētis decimæ sextæ propositionis: sicut a b ad c d, sic d g ad b f. Sed e ipsi b f, per

constructionem est æqualis: & c d ipsi d g, per quadrati diffinitionē. Aequales porrò ad eandem, eandem habent rationem, & eædem ad æquales, per septimā quinti. Est igitur ut a b ad c d, sic eadē c d ad e. Si tres itaq; rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. ut in theoremate. Quod demonstrandum receperamus.

Πρόβλημα ς, Πρόθεσις ιη.

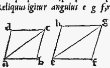
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Problema 6, Propositio 18.

Data recta linea, dato rectilineo simili, similitérque positum rectilineum describere. 18

Descriptio propositi rectilinei.

ORONTIUS. *Sit datum rectilineū a b c d, data uerò linea recta e f, ex qua, uel super quā oporteat ipsi a b c d rectilineo simile similiterq; positū describere rectilineū. Cōnectatur itaq; a c recta, per primū postulatū. Et addatā rectā lineā e f, & data illius puncta e & f: datis angulis c a b & a b c, æquales per uigesimamtertiam primi cōstituātur anguli, g e f quidem ipsi c a b, & e f g ipsi a b c. Et quoniam anguli c a b & a b c, per decimamseptimam primi, sunt minores duobus rectis: & ipsi quoque anguli g e f & e f g, binis itidem rectis sunt minores: concurrent ergo tandem e g & f g in continuum rectúmque productæ, per quintum postulatum, conueniant itaque ad punctum g. Reliquus igitur angulus e g f, reliquo a c b, per corollarium trigesimæsecundæ primi, & tertiam communem sententiam erit æqualis. Aequiangulum est propterea e f g triangulum, ipsi a b c triangulo. Ad datam rursum lineam rectam e g, & data illius puncta e & g, datis angulis d a c & a c d, æquales anguli per eandem uigesimamtertiam primi constituantur, h e g quidem ipsi d a c, & e g h ipsi a c d. & producantur e h, & g h, per secundū postulatum: donec (ueluti priores) congrediantur ad punctum h. Erit itaque reliquus anglus qui ad h, reliquo qui ad d consequenter æqualis: & proinde e g h triangulum, ipsi a c d triangulo æquiangulū.*

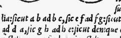


Problematis ostensiua resolutio.

Aequiangulū insuper est e f g triangulum, ipsi triangulo a b c. Aequiangulorum porrò triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, per quartam huius sexti. Est igitur ut a b ad b c, sic e f ad f g. sicut insuper b c ad a c, sic f g ad e g. sicut præterea a c ad c d, sic e g ad g h. Et ex æquali igitur, per uigesimamsecundam quinti, sicut b c ad c d, sic f g ad g h. Rursum est sicut c d ad d a, sic g h ad h e: & sicut d a ad a c, sic h e ad e g: sicútque a c ad a b, sic e g ad e f. Et ex æquali rursum, per eandem uigesimamsecundam quinti, sicut d a ad a b, sic h e ad e f.

| b c. a c. c d. | f g. e g. g h. |

Et quoniam angulus g e f, angulo c a b est æqualis, & h e g ipsi d a c: totus propterea angulus h e f, toti d a b, per secundam communem sententiam æqualis est. Et proinde totus f g h, toti b c d respondenter æqualis. Angulus porrò qui ad f, angulo qui ad



b: & reliquus qui ad h, reliquo qui ad d æqualis ostensus est. Aequiangulum est itaque e f g h rectilineum, ipsi rectilineo a b c d. Patuit, quòd & latera quæ circum æquales sunt angulos, cum eodem habet proportionalia: sicut a b ad b c, sic e f ad f g: sicut item b c ad c d, sic f g ad g h: & sicut c d ad d a, sic g h ad h e: sicut denique d a ad a b, sic h e ad e f. Simile est itaque rectilineum e f g h, ipsi rectilineo a b c d, atque similiter positum: per primam huius sexti diffinitionem. Super data igitur recta linea e f, dato rectilineo a b c d, simile similiterque positum rectilineum descriptum est e f g h. Quod fecisse oportuit.

Θεώρημα ιγ, Πρότασις ιθ.

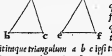
Τὰ ὅμοια τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Theorema 13, Propositio 19.

Similia triangula, adinuicem in duplo maiore sunt ratione laterum similis rationis.

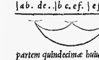
ORONTIVS. Sint duo similia, hoc est æquiangula & proportionalium laterum triangula, a b c & d e f: habentia angulum qui ad b æqualẽ angulo qui ad e, & sicut a b ad b c, sic d e ad e f. Dico triangulum a b c ad triãgulum d e f duplo maiorẽ habere rationẽ, quam latus b c ad latus e f: hoc est, qđ ratio ipsius a b c triãguli ad triangulũ d e f, ex ratione lateris b c ad latus e f per seipsam multiplicata consurgit. In primis itaque, aut b c est æqualis ipsi e f, aut inæqualis. Si æqualis, erit sicut a b ad e f, sic d e ad b c. æquales enim ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales per septimam quinti. Et proinde triangula a b c & d e f, habebunt unum angulum uni angulo æqualem: & quæ circum æquales angulos latera reciprocè proportionalia. Aequum erit itaque triangulum a b c ipsi triangulo d e f, per secundam partem decimæquintæ huius sexti: sicuti & basis b c, basi e f. Atqui ratio æqualitatis eorundem triangulorum, ex ipsa ratione æqualitatis laterum b c & e f duplicata, id est, per seipsam multiplicata consurgit. Quantitates enim duarum rationum æqualitatis, per quintam diffinitionem huius sexti inuicem multiplicatæ: restituunt æqualitatis itidem quantitatem.

Prima ostensionis differẽtia.

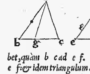


¶ At si b c fuerit inæqualis ipsi e f, altera earum erit maior. Esto b c, ipsa e f maior: & ipsis b c & e f, tertia suscipiatur proportionalis b g, per undecimã huius sexti: sicut b c ad e f: sic e f ad b g, & connectatur recta a g, per primum postulatum. Cùm enim b c maior sit e f, multò maior erit igitur ipsa b g: poterit itaque b g secari ab eadem b c. Et quoniam est ut a b ad b c, sic d e ad e f: & permutatim igitur, per sedecimã quinti, sicut a b ad d e, sic b c ad e f. Sicut porrò b c ad e f, sic e f ad b g: & proinde sicut a b ad d e, sic per undecimã quinti e f ad b g.

Secũda eiusdẽ ostẽsionis differentia.

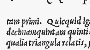


Triangulorum itaque a b g & d e f, unum angulum qui ad b uni angulo qui ad e æqualem habentium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos. Aequum eſt itaque a b g triangulum, ipſi triangulo d e f, per ſecundã partem quindecimæ huius ſexti. Rurſum quoniam eſt ſicut b c ad e f, ſic e f ad b g: tres itaque rectæ lineæ ſunt proportionales. Prima igitur ad tertiam, duplo maiorem rationem habet, quàm ad ſecundam: per decimam ipſius quinti diffinitionem. Sed ſicut prima b c ad tertiã b g, ſic a b c triangulum ad triangulum a b g, per primam huius ſexti: ſub eodẽ enim ſunt uertice, atque in eadem altitudine ipſa triangula. Et triangulum igitur a b c ad triãgulum a b g: duplo maiorem rationem habet, quàm b c ad e f. Ipſi porrò a b g triangulo, æquum eſt triãgulum d e f: & idem triangulum ad æqualia triangula eandem habet rationem, per ſeptimam quinti. Et triãgulum igitur a b c ad triangulum d e f, duplo maiorem rationem habet quàm b c ad e f, hoc eſt, ex duabus rationibus b c ad e f inuicem multiplicatis conſurgentem. Similia itaque triangula, in duplo maiore ratione ſunt laterum ſimilis rationis. Quod demonſtrandum receperamus.



Corollarium.

¶ Erit proinde manifeſtum, quòd ſi tres rectæ lineæ fuerint proportionales: erit ſicut prima ad tertiam, ſic quod à prima deſcribitur rectangulum, ad ſimile ſimilitérque poſitum rectangulum quod à ſecunda. Oſtenſum eſt enim ſicut b c ad b g, ſic a b c triangulum ad triãgulum a b g. Et ſicut igitur b c ad b g, ſic a c rectangulum ad d f rectangulum. Omne ſiquidem rectangulum, diuiſibile eſt in duo ſimilia & æqualia triangula, per trigeſimãquartam primi. Quicquid igitur de triangulo ad triãgulum præoſtẽſum eſt: id per decimamquintam quinti de triangulis ſimilibus & æqualibus ad ſimilia & æqualia triangula relatis, ſubſequi neceſſum eſt.



Θεώρημα ιθ, Πρόθεσις κ.

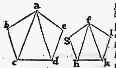
Τὰ ὅμοια πολύγωνα, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Theorema 14, Propoſitio 20.

Similia polygona, in ſimilia triangula diuiduntur, & in æqualia numero: & æqua ratione totis. Et polygonum ad polygonum duplo maiorem rationem habet, quàm ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus. 20

ORONTIVS. ¶ Sint bina & similia polygona a b c d e, & f g h k l, habentia angulum qui ad f, angulo qui ad a æqualem, & eum qui ad g, ei qui ad b, & qui ad h, ei qui ad c, & sic de cæteris: sitque ut latus a b ad b c, sic f g ad g h, sicútque b c ad c d, sic g h ad h k, & deinceps ita, seruata late terum & angulorum respondentia. Dico primùm, quòd ipsa a b c d e, & f g h k l polygona, in similia & æqualia numero diuiduntur triangula. Connectantur enim a c & a d, necnon f h & f k lineæ rectæ, per primum postulatum. Et quoniam per hypothesin (hoc est, datam polygonorum similitudinem) angulus qui ad b, æquus est angulo qui ad g, & sicut latus a b ad b c, sic f g ad g h: fit ut bina triangula a b c, & f g h, habeant unum angulũ uni angulo æqualem, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia. Aequiangula sunt propterea a b c, & f g h triangula, per sextam huius sexti: & æquales habẽt angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtẽduntur, utpote, angulum b a c, angulo g f h, & angulum b c a, ipsi g h f. Hinc per quartam eiusdem sexti, proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos: & similis rationis, quæ æqualibus angulis latera subtẽdũtur. sicut igitur a c ad b c, sic f h ad g h. Sed per hypothesin, ut b c ad c d, sic g h ad h k. Et ex æquali igitur, sicut a c ad c d: sic f h ad h k, per uigesimam secundam quinti. Et quoniam totus angulus b c d, toti angulo g h k, per hypothesin est æqualis, & angulus b c a, ipsi g h f æqualis nunc ostensus est: reliquus igitur a c d, reliquo f h k, per tertiam communem sententiam est æqualis. Triangula itaque a c d & f h k, habẽt rursum unum angulum uni angulo æqualem, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: æquiangula sunt igitur a c d & f h k triangula, per eandem sextam huius sexti. Et per quartam ipsius sexti, latera quæ circum æquales angulos proportionalia. Haud dissimiliter ostendetur triangulum a d e, triangulo f k l, fore æquiangulum: & proportionalia quæ circum æquales angulos habere latera. Simile est itaque a b c triangulum ipsi f g h triangulo, & a c d ipsi f h k, necnon a d e ipsi triangulo f k l: per primam huius sexti libri diffinitionem. Data igitur a b c d e & f g h k l polygona, in similia & æqualia numero triangula diuiduntur. ¶ Dico insuper, quòd ipsa triangula sunt inuicem, atque totis ipsis polygonis proportionalia: sicut triangulum a b c ad triangulum f g h, sic a c d ad f h k, & a d e ad f k l triangulum: sicútque a b c triangulum ad ipsum triangulum f g h, sic a b c d e polygonũ ad polygonum f g h k l. Cùm enim a b c triangulum simile sit f g h triangulo, sintque a c & f g similis rationis latera: triangulum igitur a b c ad triangulum f g h, duplo maiorem rationem habet, quàm latus a c ad latus f h, per antecedentem decimamnonam propositionem. Et proinde triangulum a c d, ad triangulum f h k duplo itidem maiorem ratione habet, quàm idem latus a c ad latus f h. Quæ autem eidem sunt eædem rationes, adinuicem sunt eædẽ

Prima theorematis pars.



a c. b c. c d	f h. g h. h k.



per undecimam quinti.Et sicut igitur a b c triangulum ad triangulum f g h, sic triangulum a c d ad triangulum f h k. Rursum quoniam triangulum a c d simile est triangulo f h k, & latus a d similis rationis cum f k: triangulum propterea a c d, ad triangulum f h k duplo maiorem rationē habet, quam latus a d ad latus f k, per ipsam antecedentem decimamnonam huius sexti.Et triangulum consequenter a d e, ad triangulum f k l duplo itidem maiorem rationē habet, quàm idem latus a d ad ipsum latus f k. Et sicut igitur a c d triangulū ad triangulum f h k: sic per eandem undecimam quinti, triangulum a d e, ad triangulum f k l. Sicut porrò a c d ad f h k: sic patuit a b c triangulū, ad triangulum f g h. Et sicut igitur per undecimam ipsius quinti, triāgulum a b c, ad triangulum f g h: sic triangulum a d e, ad triangulum f k l.

a b c	f g h	a c d. f h k	a d e. f k.

Proportionalia itaque sunt ipsa nuper expressa triangula: sicut a b c ad f g h, sic a c d, ad f h k, & a d e, ad f k l. Est igitur per duodecimam quinti, sicut unum antecedentium ad unū consequentiū, sic omnia antecedētia ad oīa cōsequētia. Sicut itaq; triāgulū a b c, ad triangulū f g h: sic a b c d e polygonum, ad polygonum f g h k l.

Sicut —— a b c.			f g h.
sic —— a c d.	ad	{	f h k.
& —— a d e.			f k l.

Tertia pars.

Sunt igitur ipsa triangula tum inuicem, tū ipsis totis polygonis proportionalia. ¶ Aio demum, quòd polygonum a b c d e, ad f g h k l duplatam rationem habet, quam latus a b ad similis rationis latus f g. Ostensum est enim ut triangulum a b c, ad triangulum f g h: sic a b c d e polygonum, ad polygonum f g h k l. Sed triangulum a b c, ad triangulum f g h duplo maiorem rationem habet, quàm a b latus ad similis rationis latus f g, per antecedentem decimamnonam propositionem huius sexti: simile nanque ostensum est a b c triangulum, ipsi f g h triangulo. Et polygonum igitur a b c d e ad polygonum f g h k l duplo maiorem rationem habet, quàm latus a b ad similis rationis latus f g. Similia itaque polygona: &c. ut in theoremate. Quod fuerat ostendendum.

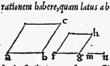
¶ Corollarium primum.

¶ Fit itaque generaliter manifestum, quòd similes quæcūque rectilineæ figuræ, in duplo maiore ratione sunt adinuicem similis rationis laterum: id est, quòd ratio similium rectilinearum figurarum, ex duplo maiore similium laterum ratione consurgit. Id enim primò patuit in triangulis, & rectangulis, siue quadratis: nunc autem in polygonis, & omnia polygona in triangula diuisibilia sunt. Hic & in similibus quibuscunque propositionibus & corollarijs, per duplo maiorem rationem ipsa ratione data, non eam uelim intelligas quæ per duo, sed quæ per seipsam multiplicata consurgit.

¶ Corollarium secundum.

¶ Sequitur rursum, quòd si tres rectæ lineæ fuerint proportionales, erit sicut prima ad tertiam: sic descripta super primam, uel à prima species rectilinei, ad similem similitérque positam speciem, quæ à secunda uel supra secundam conscribitur. Ostensum est enim polygonum a b c d e, ad polygonum f g h k l duplam rationē

rationem habere, quam latus a b ad latus f g. Et si ipsarum a b & f g tertiam acceperimus proportionalem, per undecimã huius sexti, utpote m n: ipsa a b ad m n duplã itidem rationem habebit, quam eadem a b ad f g, per decimam diffinitionem quinti. Et proinde sicut a b ad m n, sic a b c rectilineum ad simile similitérque positum rectilineum f g h.



Θεώρημα ιε, Πρόθεσις κα.

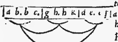
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Theorema 15, Propositio 21.

21 Quæ eidẽ rectilineo sunt similia, & adinuicẽ sunt similia.

ORONTIVS. Sint bina rectilinea a b c & d e f, eidem rectilineo g h k similia. Dico a b c rectilineum, simile fore rectilineo d e f. Cum enim ex hypothesi a b c & g h k rectilinea, similia sint adinuicem: habebunt propterea angulos æquales ad unum, & quæ circum æquales angulos sunt latera proportionalia, per primæ diffinitionis huius sexti conuersionem. Et proinde rectilinea d e f & g h k, æquiangula erunt, & proportionalium itidem laterum: cùm ex ipsa hypothesi similia sint adinuicem. Sit uterque angulorum qui ad b & e, ipsi angulo qui ad h æqualis: & sicut g h ad h k, sic a b ad b c, & d e ad e f. Et quoniam angulus qui ad b æqualis est angulo qui ad h, & eidẽ angulo qui ad h æqualis angulus qui ad e: angulus igitur qui ad b, angulo qui ad e, per primam communem sententiam est æqualis. Insuper quoniam est ut a b ad b c, sic g h ad h k: sicut rursum g h ad h k, sic d e ad e f. Et sicut igitur a b ad b c, sic per undecimam quinti, d e ad e f. Proportionalia itaque sunt latera, quæ circum eosdem æquales angulos qui ad b & e. Haud dissimiliter ostendemus, reliquos angulos ipsius a b c rectilinei, reliquis angulis ipsius d e f fore inuicem æquales: & circũ eosdem æquales angulos latera proportionalia. Simile est itaque a b c rectilineũ, ipsi rectilineo d e f, per primam huius sexti diffinitionem. Quod oportebat demonstrare.





Θεώρημα ιϛ, Πρόθεσις κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

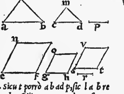
Theorema 16, Propositio 22.

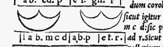
22 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerĩt: & ab eis rectilinea similia similitérque descripta proportionalia erunt.

Et ſi ab ipſis rectilinea ſimilia ſimilitérque deſcripta, proportionalia fuerint: ipſæ quoque rectæ lineæ proportionales erunt.

ORONTIVS. ¶ Sint quatuor rectæ lineæ diſcõtinuè proportionales a b, c d, e f, & g h: ſicut quidem a b ad c d, ſic e f ad g h. Et per decimamoctauam huius ſexti, ab ipſis a b & c d, ſimilia ſimilitérque poſita rectilinea deſcribãtur, l a b & m c d: & per eãdem decimãoctauã, ab ipſis e f & g h, alia quædã ſimilia ſimilitérq; poſita rectilinea, n e f & o g h. Aio fore ſicut l a b ad m c d, ſic n e f ad o g h. Inueniatur enim ipſis a b & c d, tertia proportionalis p: ipſis autem e f & g h, tertia itidem proportionalis r, per undecimã huius ſexti. Cum ſit igitur ex hypotheſi, ut a b ad c d, ſic e f ad g h: & per conſtructionẽ, ſicut c d ad p, ſic g h ad r. Et ex æqua igitur ratione, ſicut a b ad p: ſic e f ad r, per uigeſimã ſecundã quinti. Sicut porrò a b ad p, ſic l a b rectilineum, ad rectilineum m c d: per ſecundum corollarium uigeſimæ huius ſexti. Et ſicut igitur l a b rectilineum, ad rectilineũ m c d: ſic per undecimam ipſius quinti, e f ad r. Sicut rurſum e f, ad r: ſic per idẽ corollarium, rectilineum n e f ad rectilineũ o g h. Et ſicut itaq; l a b, ad m c d: ſic per eandem undecimam quinti, n e f ad o g h.

Pars prima theorematis.

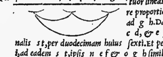


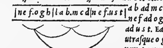




¶ Si autem fuerit ut l a b ad m c d, ſic n e f ad o g h: dico uerſa uice, quatuor lineas rectas a b, c d, e f, & g h, fore proportionales, ſicut a b ad c d, ſic e f ad g h. Datis enim tribus rectis lineis a b, c d, & e f: quarta inueniatur proportionalis s t, per duodecimam huius ſexti. Et per decimamoctauam eiuſdem ſexti, ad eadem s t, ipſis n e f & o g h ſimile ſimilitérque poſitum rectilineũ deſcribatur u s t. Et quoniam eſt ut a b ad c d, ſic e f ad s t: & ab ipſis a b & c d, ſimilia ſimilitérque poſita deſcribuntur rectilinea l a b & m c d: ab ipſis autem e f & s t, ſimilia itidem ſimilitérque poſita rectilinea n e f & u s t. Eſt igitur per primam partem iam demonſtratam huius propoſitionis, ſicut l a b ad m c d, ſic n e f ad u s t. Receptum eſt autem ex hypotheſi, ut l a b ad m c d, ſic n e f ad o g h. Et ſicut igitur n e f ad o g h: ſic per undecimã quinti, n e f ad u s t. Eadem itaque magnitudo n e f, ad utraſque o g h & u s t, eandem habet rationem. Aequum eſt igitur rectilineum o g h, ipſi u s t: per nonam quinti. Eſt autem & eidem ſimile, ſimilitérque poſitum, per cõſtructio-

Secunda pars conuerſa primæ.



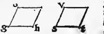


structionem. Similia porrò similitérque posita, & inuicem æqualia rectilinea, ab æqualibus, aut super æqualibus rectis lineis describuntur. Aequalis est igitur s t ipsi g h. Est autem ut a b ad c d, sic e f ad s t: ipsi porrò s t, æqualis ostensa est g h: & eadem ad æquales, eandem habet rationem, per septimam quinti. Et sicut igitur a b, ad c d: sic e f, ad g h. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum susceperamus.

¶ Lemma siue assumptum.

¶ Quod autem similia, similitérque posita, & inuicem æqualia rectilinea, habeant similis rationis latera inuicem æqualia, sic demonstratur. Sint rursum æqualia, & similia, similitérque posita rectilinea, o g h & u s t: sitque ut o g ad g h, sic u s ad s t. Aio quòd g h & s t, sunt inuicem æquales. Si namque fuerint inæquales: altera maior erit. Esto (si possibile sit) g h maior s t. Et quoniam est ut o g ad g h, sic u s ad s t: & econtra igitur, uel à conuersa ratione, sicut g h ad o g, sic erit s t ad u s: per corollariũ quartæ libri quinti. Sed prima g h maior est tertia s t, & secunda itaque o g, quarta u s maior erit, per decimamquartam ipsius quinti. Binæ itaque o g & g h, duabus u s & s t erunt maiores: & proinde ipsum rectilineum o g h, maius rectilineo u s t. quæ enim sub maioribus rectis comprehenduntur, maiora esse necessum est. Est autem eidem æquale, per hypothesin: quæ simul impossibilia sunt. Non est igitur g h, maior ipsa s t. similiter ostendetur, quòd neque minor. Aequalis est itaque g h eidem s t. Quod fuerat ostendendum.

Hypothesis demõstratio.



g h	o g	s t	v s

Θεώρημα ιζ, Πρόθεσις κγ.

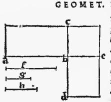
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Theorema 17, Propositio 23.

23 Aequiangula parallelogramma, adinuicem rationem habent compositam ex lateribus.

ORONTIVS. ¶ De lateribus uelim intelligas, quæ circum æquales sunt angulos. Sint igitur bina parallelogramma inuicem æquiangula, a b c & d b e, quorum angulus qui sub a b & b c, angulo qui sub d b & b e contineatur sit æqualis. Dico a b c parallelogrammum, ad parallelogrammum d b e, rationem habere compositam ex ratione laterum a b ad b e, & c b ad b d. Cõstituantur enim a b & b e latera in directũ: hoc autem fiet, cùm anguli c b a & c b e, duobus rectis fuerint æquales, per decimamquartam primi. tunc quoque in directum erit c b ipsi b d, per eandem propositionẽ: nam anguli e b c & e b d, per primam & tertiam communem sententiam, duobus itidẽ rectis æquabũtur. Compleatur denique parallelogrammum c b e: productis in continuum rectũ, que, per secundum postulatum, eorundem parallelogrammorum lateribus. Proponatur insuper recta quædam linea f: & tribus datis rectis lineis a b, b e, & f: quarta subsumatur proportionalis g, per duodecimam huius sexti. Erit igitur ut a b, ad b e: sic f, ad g. Et per eandem duodecimam propositionem, tribus datis

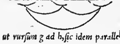
Partium figuræ præparatio

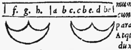


rectis lineis c b. b d, & g: quarta rursum proportionalis accipiatur h. Erit ergo ut c b, ad b d: sic g ad h. Est autem sicut a b ad b e, sic f ad g. Rationes itaque ipsius f ad g, & g ad h, eædem sunt ipsis rationibus a b ad b e, & c b ad b d. Ratio porrò f ad h, componitur ex ratione ipsius f ad g, atque ipsius g ad h: ueluti, quita huius sexti præmissum est diffinitione. Et proinde ratio f ad h, componitur ex ratione laterum a b ad b e, & c b ad b d. His præostensis, quoniam a b c & c b e parallelogramma, sub eadem sunt altitudine: ad se inuicem igitur sunt ut bases, per primam huius sexti. Sicut igitur a b, ad b e: sic a b c parallelogrammum, ad parallelogrammum c b e. Sicut autē a b ad b e, sic per constructionem f ad g. Et sicut igitur f ad g: sic per undecimam quinti, a b c parallelogrammum, ad c b e parallelogrammum. Insuper, quoniam c b e & d b e parallelogramma, in eadē sunt altitudine: ad se inuicē rursū sunt ut bases, per eandē primā huius sexti. Sicut ergo c b ad b d: sic parallelogrāmū c b e, ad d b e parallelog. Sicut porrò c b, ad b d: sic per cōstructionē g, ad h. Et sicut igitur g ad h: sic parallelogrāmum c b e, ad d b e parallelogrāmum, per ipsam undecimam quinti. Et quoniam ostensum est, ut f ad g, sic a b c parallelogrammum, ad parallelogrammum c b e: sic ut rursum g ad h, sic idem parallelogrammum c b e, ad d b e parallelogrammum. Ex æqua igitur ratione, per uigesimā secundam eiusdem quinti, sicut f ad h: sic a b c parallelogrāmū, ad d b e, parallelogrānum. Atqui ratio f ad h, composita est (uti supra deduximus) ex ratione laterum a b ad b e, & c b ad b d. Et parallelogrammum igitur a b c, ad parallelogrammum d b e rationem habet compositam ex ratione laterum a b ad b e, & c b ad b d. Aequiangula itaque parallelogramma, rationem habent compositam ex lateribus, angulos inuicem æquales continentibus. Quòd demonstrandum fuerat. ¶ Haud dissimili discursu probabis, eandem rationem a b c parallelogrammi ad parallelogrammum d b e, componi ex ratione lateris a b ad b d, atque c b ad b e: ubi tribus datis rectis a b, b d, & f, quartam dederis proportionalem g. & rursum tribus datis c b, b e, & g, quartam acceperis proportionalem h, per duodecimam huius sexti propositionem.

Præcipua demōstrationis resolutio.







Θεώρημα ιη, Πρότασις κδ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

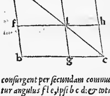
Theorema

Theorema 18, Propositio 24.

24 OMnis parallelogrammi, quæ circa dimetientem parallelogramma: similia sunt toti, & adinuicem.

ORONTIVS. ¶Esto datum parallelogrammum a b c d, cuius dimetiens sit a c, & circa ipsum dimetientem parallelogramma, e f, & g h. Aio ipsa e f & g h parallelogramma, toti parallelogrammo a b c d, atque inuicem fore similia. Quòd autem e f parallelogrammum, toti a b c d sit simile, sic demõstratur. In primis enim, æquiangulum est ipsum e f parallelogrammum, eidem a b c d parallelogrãmo. Nam angulus qui ad a, utriq; parallelogrammo communis est.

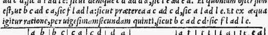
Quòd e f parallelogrammũ, simile sit toti a b c d.



Insuper, quoniã parallela est f l, ipsi b c: æqualis est angulus a f l, ipsi angulo a b c: necnon & a l f, ipsi a c b, per uigesimamnonam primi. Angulus porrò qui sub f a l aut b a c, utrique triangulo a b c & a f l commu nis est. Aequiangulum est itaque triangulum a f l, triangulo a b c. Haud dissimiliter triãgulum a e l, triangulo a d c ostendetur æquiãgulum: & angulus a e l angulo a d c æqualis, atque a l e ipsi angulo a c d. Si autẽ æquales anguli, æqualibus componantur angulis: consurgent per secundam communem sententiam, æquales anguli. Aequus est igitur angulus f l e, ipsi b c d: & totum proinde parallelogrammum e f, toti a b c d æquiangulum. Aio quòd proportionalia habent latera, quæ circum æquales angulos: quoniam a b c & a f l triangula sunt (uti nuper ostensum est) inuicem æquiangula: proportionalia itaque sunt latera quæ circum æquales angulos, per



quartam huius sexti. Sicut igitur b a ad a c, sic f a ad a l: item sicut a c ad a d, sic a l ad a e. Et ex æqua igitur ratione, sicut b a, ad ad a d: sic f a, ad a e. Proportionalia itaque sunt latera, quæ circum angulum qui ad a utrique parallelogrammo communem. Rursum erit per eandem quartam sexti, sicut a b ad b c, sic a f ad f l: sicútque b c ad c a, sic f l ad l a. Sicut rursum a c ad c d, sic a l ad l e: sicut denique c d ad d a, sic l e ad e a. Et quoniam ostensum est, ut b c ad c a, sic f l ad l a: sicut præterea a c ad c d, sic a l ad l e. Et ex æqua igitur ratione, per uigesimamsecundam quinti, sicut b c ad c d: sic f l ad l e.



Aequiangulorum itaque parallelogrammorum a b c d & e f, proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. simile est igitur e f parallelogrammũ, ipsi a b c d parallelogrammo: per primam huius sexti diffinitionem. ¶Haud dissimili uia, g h parallelogrammum, ipsi a b c d parallelogrammo simile fore conuincetur: eundem qui prius uersus angulum c, & ipsum g h parallelogrammum respõdenter iterãdo discursũ. Et proinde utrũque ipsorũ e f & g h parallelogrãmorũ, simile est eidẽ a b c d parallelogrãmo. Omne autẽ parallelogrãmũ rectilineũ est: et quæ eidẽ rectilineo sũt similia, et adinuicẽ similia sũt per 21 hui9 6.

Quòd g h parallelogrãmũ eidem a b c d sit simile.

Quòd e f & g h, similia sint adinuicē.

simile est igitur e f parallelogrammum, ipsi g h parallelogrammo. Omnis itaque parallelogrammi, quæ circa dimetientem parallelogramma, similia sunt toti, & adinuicem. Quod oportuit ostendisse.

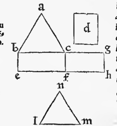
Πρόβλημα ζ, Πρότασις. κε.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Problema 7 Propositio 25.

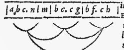
Dato rectilineo simile, & alij dato æquale, idem constituere 25

Partium figuræ præmittēdadescriptio.



ORONTIVS. Sint bina rectilinea, a b c inquàm, & d: sitque receptum ipsi dato a b c rectilineo simile, ipsi uerò d æquale, idem rectilineum constituere. Ad datā itaque rectam lineam b c, & in dato angulo qui sub e b c, dato rectilineo a b c, æquale construatur parallelogrammum b f: simíliter & ad rectam lineam f c, atque in dato angulo qui sub f c g, ei qui sub e b c æquali, dato rectilineo d, æquale rursum parallelogrammum constituatur c h, per quadragesimā quartam, & quadragesimamquintam primi, utroque rectilineo (si expediat) in triangula distributo. Et quoniā angulus f c g æquus est angulo e b c, per constructionem, utriq; autem communis b c f: anguli propterea b c f & f c g, duobus angulis e b c & b c f, sunt per secundam communem sententiam æquales. sed anguli e b c & b c f, sunt æquales duobus rectis, per uigesimamnonam ipsius primi. Et duo igitur anguli b c f & f c g, binis itidem rectis sunt æquales. In directum est igitur b c, ipsi c g, per decimamquartam eiusdem primi: & e f consequenter ipsi f h. Binis insuper datis rectis lineis b c & c g, media proportionalis inueniatur l m, per decimamtertiam huius sexti. Et per decimamoctauam eiusdem sexti, super data recta linea l m, dato rectilineo a b c, simile similitérq; positū rectilineū describatur n l m. Aio rectilineū n l m, æquum fore ipsi d. Cùm enim tres lineæ rectæ b c, l m, & c g, sint per constructionem continuè proportionales: erit per secundum corollarium uigesimæ huius sexti, sicut prima ad tertiam, sic species rectilinei quæ à prima, ad similē similitérque positam speciem quæ à secunda. Sicut igitur b c, ad c g: sic a b c rectilineum, ad rectilineum n l m. Sicut porrò b c, ad c g: sic b f parallelogrammū, ad parallelogrammum c h, per primam huius sexti: sunt enim in eadem altitudine c f. Ergo sicut a b c rectilineum, ad rectilineum n l m: sic per undecimam quinti, b f parallelogrammum, ad parallelogrammum c h. sed rectilineum a b c, æquum est per constructionem ipsi b f parallelogrammo: &

Demonstratiua problematis resolutio.



& rectilineum igitur n l m, ipsi parallelogrammo c b, per decimāquartam quĩ ti est æquale. Eidem rursum parallelogrammo c b, æquum est d rectilineum, per constructionem: & n l m itaque rectilineum, ipsi d rectilineo, per primam communem sententiam est æquale. Constructum est autem & ipsi a b c simile. Idem itaque rectilineum n l m, ipsi dato rectilineo a b c simile, & alij dato, scilicet d, æquale constitutum est. Quod efficere oportebat.

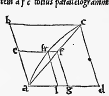
Θεώρημα ιθ, Πρότασις κϛ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Theorema 19, Propositio 26.

SI à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti & similiter positum, communem angulum habens ei: circum eundem dimetientem est toti.

ORONTIVS. *De dimetiente uelim intelligas, qui ab ipso communi angulo, in utrunque oppositum extenditur. Esto datum parallelogrammum a b c d: à quo simile similitérque positum, & communem illi habens angulum qui ad a, auferatur distinguatúrue parallelogrammum a e f g. Dico ipsa a b c d & a e f g parallelogramma, circa eundem fore dimetientem a f c: hoc est, dimetientem a f c totius parallelogrammi a b c d, transire per angulum qui ad f, & utrique parallelogrammo fore communem. Si enim a c non trāsierit per f: trāseat (si possibile sit) ut a h c: secabit igitur aut a b c, aut e f g latus ipsius a e f g parallelogrāmi. Secet ipsum latus e f, in puncto h: & per punctum h, utrique ipsarum a e & f g parallela ducatur h l, per trigesimamprimam primi. Erit itaque e l parallelogrammum, & circa eundem dimetientem cum ipso a b c d parallelogrammo.*



Ostensio theorematis ab impossibili.

Simile erit igitur e l parallelogrammum, ipsi a b c d parallelogrammo, per uigesimamquartam huius sexti. Eidem porrò a b c d parallelogrammo, simile est per hypothesin, ipsum e f g parallelogrammum. Quæ autem eidem rectilineo similia, & adinuicem similia sunt, per uigesimamprimam huius sexti. Simile erit itaque e l parallelogrammum, ipsi e f g parallelogrammo. Similia porrò parallelogramma sunt, quæ angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera proportionalia, per primæ diffinitionis huius sexti conuersionem. Et sicut igitur e a ad a g, sic e a ad a l. Ad quas autem eadem eandem habet rationē, ipsæ sunt æquales, per nonam quinti. Aequalis foret igitur a g ipsi a l, totū suæ parti: quod per nonam communem sententiam est impossibile. Idem etiam subsequetur inconueniens, ubi posueris eundem a c dimetientem secare latus f g. Transit igitur a c totius a b c d parallelogrammi dimetiens, per angulum atque punctum f: & proinde ipsum a e f g parallelogrammum, circum eundem dimetientem est toti a b c d parallelogrammo. Igitur si à parallelogrammo paral-

lelogrammum auferatur:&c,ut in theoremate. Quod demonstrare fuerat operæpretium.

Θεώρημα κ, Πρόθεσις κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένω, μέγιστον ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Theorema 20, Propositio 27.

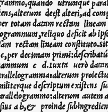
Omnium parallelogrammorum circum eandem rectá lineam proiectorum, deficientiúmque specie parallelogrammis similibus similitérque positis, ei quòd à dimidia descriptum est: maximum est quod à dimidia proiectum parallelogrammum, simile existens sumpto. 2.

Quomodo parallelográmum deficiat specie à dato parallelográmo.

Prima theorematis differentia.

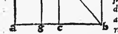
ORONTIVS. Deficere specie dicitur parallelogrammum, dato parallelogrammo, quando utrunque parallelogrammum super eadem recta linea cōsistens, alterum deest alteri, ad complendum similis speciei parallelogrammum super totam datam rectam lineam coextensum. Vel dum comparatum parallelogrammum, reliquo deficit ab ipso similis speciei parallelográmo, super totam ipsam rectam lineam constituto. Sit igitur data recta linea a b, secta bifariam in c, per decimam primi: describatúrque à dimidia c b, contingens parallelogrammum c d. Iuxta uerò datam rectam lineam a b, gemina comparentur parallelogramma: alterum proiectum à reliqua dimidia a c, utpote a e, simule similiterque descriptum existens sumpto c d, & deficiēs specie ipso c d à toto a d parallelogrammo: alterum autem a f, super a g comparatum maiore dimidia ipsius a b, & proinde subingrediens ipsum parallelogrammum c d, deficiénsque specie parallelogrammo g h, simili similiterq; posito ipsi c d, quod à dimidia c d descriptū est, ad complendum ipsum a b parallelogrammum. Dico quòd a e parallelogrammum, maius est a f parallelogrammo. Cùm enim ex hypothesi, g h parallelogramnum, simile sit ipsi parallelogrammo c d: circum igitur eundē sunt dimetientem e f b, per uigesimamsextam huius sexti. Producatur ergo g f in rectum & continuum usque ad latus e d, per secundum postulatum. Parallelogrammi igitur c d, eorum quæ circa dimetientem sunt parallelogrammorum supplementa c f & f d, sunt per quadragesimamtertiam primi adinuicem æqualia. Addatur utrique commune g h: totum ergo c h, toti g d, per secundam communem sententiam est æquale. Eidem porrò c h, æquum est c l, per trigesimamsextam primi: sunt enim in basibus æqualibus a c & c b, in eisdémque parallelis a b & l h. Et g d itaque, ipsi c l per primam communem sententiam æquum est. Commune rursum addatur c f: totus igitur gnomon c b d, toti a f

Demōstratio



paral-

parallelogrammo est æquale. Sed totum parallelogrammum c d, maius est per nonam communem sententiam, ipso gnomone c b d: & proinde, ipso a f maius. Aequum est porrò a e parallelogrammum, ipsi c d parallelogrammo, per eandé trigesimamsextam primi: in basibus enim sunt æqualibus a c & c b, atque in eisdem parallelis a b & e d. Quæ autem sunt æqualia, eiusdem sunt æque maiora, per sextæ communis sententiæ conuersionem. Maius est itaque parallelogrammum a e, ipso a f parallelogrammo.



¶Sed esto a f parallelogrammum, proiectum super a g, minore dimidia ipsius a b lineæ datæ, & egrediens ipsum a e parallelogrammum: deficiens rursum specie ipso f b parallelogrammo simili similitérque posito ipsi c d, quod a dimidia c b descriptum est, ad complendum totum a m parallelogrammum. Aio quòd & a e parallelogrammum, maius est ipso a f parallelogrammo.

Secunda theorematis differentia.

Demõstratio

Cùm enim ex hypothesi c d & f b parallelogramma, similia sint: circum eundem propterea dimetientem f e b, per uigesimãsextã huius sexti cõstituentur. Cõpleantur itaq; per trigesimãprimã primi, & secundũ postulatũ, h l & a m parallelogrãma: ut in ipsa cõtinetur figura. Et quoniã parallelogrãma sunt a l & c m: sũt igitur per trigesimãquartã primi, n l & l m ipsis a c et c b quæ ex opposito, atq; inuicẽ æquales. Et proinde n e parallelogrammũ, ipsi e m parallelogrãmo, per trigesimãsextam primi æquale. Eidem porrò e m, æquũ est e g, per quadragesimãtertiã ipsius primi. Et n e itaque ipsi e g, per primã cõmunẽ sententiã est æquale. Subducto igitur h l: reliquũ e g, reliquo n h maius est. si autem inæqualibus e g & n h, æqualia uel idem commune a h apponatur: omnia per quartã cõmunẽ sentẽtiã, erũt inæqualia: cõsurget igitur a e parallelogrãmum, maius ipso a f parallelogrãmo. Omniũ itaque parallelogrammorũ iuxta eandem lineam consistentium, & deficientium specie: & quæ sequuntur reliqua. Quod ostendendum receperamus.

Πρόβλημα η, Πρότασις. κη.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν. Problema 8 Propositio 28.

AD datã rectã lineã, dato rectilineo æquale parallelogrãmũ cõparare, deficiẽs specie parallelogrãmo simili dato.

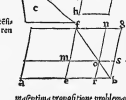
Oportet iã datũ rectilineũ, cui expedit æquũ cõparare, nõ maius esse eo quod à dimidia cõparatum, similibus existentib9 sũptis, & eius quod à dimidia, & cui expedit simile deficere.

ORONTIVS. ¶Ostensum est enim antecedenti uigesimaseptima propositione, omnium parallelogrammorum iuxta eãdem rectam lineam comparatorum,

Notandum.

deficientiũq; ſpecie ſimilibus ſimiliterq; poſitis parallelogrãmis ei quod à dimidia deſcribitur: maximũ eſſe quod à dimidia cõparatũ parallelogrãmũ, ſimile exiſtens ſupto. Oportet itaq; datũ rectilineũ, cui ad datã rectã lineã æquale cõparandũ eſt parallelogrammum: non maius eſſe eo quòd à dimidio ipſius datæ rectæ lineæ comparatur, ſimilibus ſimiliterque poſitis exiſtentibus utriuſque comparati parallelogrammi defectionibus (ad complenda ſimilis ſpeciei parallelogrãma ſuper totam datam rectam lineam coextenſa) eius inquam quòd à dimidia, & eius cui ſimile, ſimiliterque poſitum eidem quòd à dimidia deſuturum eſt parallelogrammum. ¶ Sit ergo data recta linea a b: datum uerò rectilineum, cui oportet ad datam rectam lineam a b æquum parallelogrammum comparare, eſto c, non exiſtens maius eo quòd à dimidia comparatur, ſimilibus exiſtentibus utriuſque defectionibus. Ipſum autem parallelogrammum, cui expedi ſimile deficere, ſit d. Recipio itaque ad datam rectam lineam a b, dato rectilineo c æquum parallelogrammum comparare, deficiens ſpecie parallelogrammo ipſi d ſimili.

Interpretatio problematis.



Secetur itaque a b recta biſariam in puncto c, per decimam primi. Et per decimãoctauam huius ſexti, à data recta linea e b, dato rectilineo d, ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum (quòd erit & parallelogrammũ) deſcribatur e f g: compleatúrque per trigeſimamprimam ipſius primi, & ſecundum poſtulatum, a e f parallelogrammum. Aut igitur a e f parallelogrammum, æquum eſt ipſi rectilineo c, aut eo maius: non enim minus eſſe poteſt, per aſſumptam ex antecedenti uigeſimaſeptima propoſitione problematis determinationem. Si æquale fuerit a e f parallelogrammum, ipſi rectilineo c: iam comparatum erit ad datam rectam lineam a b, dato rectilineo c æquale parallelogrammum a e f, deficiens ſpecie parallelogrammo e f g ſimili ipſi d. At ſi a e f parallelogrammum, eodem c rectilineo fuerit maius: erit & e f g parallelogrammum, æque itidem maius ipſo c: ſũt enim a e f & e f g parallelogramma, in baſibus æqualibus a e & e b, atque in eiſdem parallelis a b & f g: & proinde per trigeſimamſextam primi, inuicem æqualia. Exceſſui autem ſiue rectilineo, quo e f g parallelogrammum ſuperat ipſum c æquale, ipſi autem d ſimile ſimiliterque poſitum, idem conſtruatur h k l, per uigeſimam quintam huius ſexti. Eidem porrò d ſimile eſt e f g, per cõſtructionem: & h k l igitur ſimile eſt ipſi e f g, per uigeſimamprimam eiuſdem ſexti. Similes autem rectilineæ figuræ, habent angulos æquales ad unum, & quæ circum angulos æquales latera proportionalia, per primæ diffinitionis huius ſexti conuerſionem. Sit igitur angulus qui ad h, æqualis angulo qui ad f: & ſicut e f ad f g, ſic h k ad k l. Et quoniam e f g parallelogrammum, æquum eſt ipſis c & h l: maius eſt igitur e f g, ipſo h l: & proinde latus e f, maius ipſo h k: & f g, ipſo k l itidem maius. Oſtẽſum eſt enim lemmate uigeſimæſecundæ huius ſexti,

Prima oſtẽſionis differentia.

Differentia ſecũda, & abſoluta partium figuræ compoſitio.

ſimilia

similia similitérque posita & inuicem æqualia rectilinea:habere similis rationis latera adinuicem æqualia. Ergo quæ similia sunt & similiter posita, sed inæqualia:habent similis rationis latera inæqualia, & proinde maiora quæ sunt maioris, & minora quæ minoris sunt rectilinei. Maius est itaque f e ipso h k, & f g ipso k l. Secetur igitur per tertiam primi, ipsi h k æqualis f m, & ipsi k l æqualis f n: & per trigesimamprimam ipsius primi, compleatur m o n, & reliqua parallelogramma, ut in figura. Aequum est igitur m n parallelogrammū, ipsi h l: atque eidem simile: sed h l ipsi e f g simile est, per constructionem: & m n igitur, ipsi e f g simile est, per eandem uigesimamprimam huius sexti. Circum er go eundem sunt dimetientem f o b, ipsa e f g & m n parallelogramma, per uigesimamsextam eiusdem sexti. Et proinde parallelogrammum r s, ipsi m n, atque toti e f g simile est, per uigesimamquartam huius sexti: atque demum ipsi d simile, per ipsam uigesimamprimam eiusdem sexti. His ita præmissis, quoniā e f g parallelogrammum, ipsis c & h l est æquale, & ipsum h l æquale ipsi m n: reliquus proinde gnomon m b n, rectilineo c, per tertiam communem sententiam est æqualis. Rursum quoniam e o supplementum, æquum est o g supplemēto, per quadragesimamtertiam primi, addatur utrique commune r s: totum igitur e s, toti r g, per secundam communem sententiam est æquale. Sed eidem e s, æquum est a m, per trigesimamsextam primi: sunt enim a m & e s, in basibus æqualibus, ac in eisdem parallelis. Et a m, igitur ipsi r g, per primam communem sententiam æquum est. Adponatur rursum utrique commune e o: totum igitur a o, ipsi e o g aut m b n gnomoni, per eandem secundam communem sententiam est æquale. Eidem porrò gnomoni m b n, æquum est rectilineum c: & quæ eidē æqualia, adinuicem sunt æqualia, per primam communem sententiam. Aequum est igitur a o parallelogrammum, ipsi rectilineo c: deficitque specie (ad complendum a s parallelogrammum) ipso r s parallelogrammo, quod simile est ipsi d. Ad datam itaque rectam lineam a b, dato rectilineo c, æquum parallelogrammum comparauimus a o, deficiens specie parallelogrammo r s, dato parallelogrāmo d simili. Quod oportebat facere.

Præcipua demōstrationis resolutio.

Πρόβλημα θ. Πρότασις κθ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Problema 9. Propositio 29.

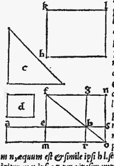
29

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo, æquale parallelogrammum prætendere, excedens specie parallelogrāmo simili dato.

ORONTIVS. *Sit rursum data recta linea a b, datum uero rectilineum c, datum insuper parallelogrammum d. Operæpretium itaque sit, ad datam rectā lineam a b, dato rectilineo c, æquum parallelogrammum comparare, excedens similis speciei parallelogrammum ī per totam a b cōparatum, parallelogrāmo*

Præparatio figuræ ipsius ostentionis præambula.

ipsi d simili. secetur itaque primùm a b recta bifariam in puncto e, per decimā primi. & à data recta linea e b, dato rectilineo d, simile similitérque positum rectilineum (& proinde parallelogrammum) describatur e f g b: per decimamoctauam huius sexti. Vtrisque præterea & e g parallelogrammo & c rectilineo æquale, ipsi autem d simile similitérque positum, eidem cōstituatur h k l: per uigesimamquintam ipsius sexti. Vtrunque igitur e g & h l, ipsi d simile est: & proinde e g & h l similia adinuicem, per uigesimamprimam eiusdem sexti. Similia uerò rectilinea: habent angulos æquales ad unum, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: per primæ diffinitionis huius sexti conuersionē. Esto igitur angulus qui ad k, æqualis angulo qui ad f: & sicut e f ad f g, sic h k ad k l. Et quoniam h l, utrisque simul & e g parallelogrammo, & ipsi c rectilineo est æquale, per constructionem: maius est igitur h l, ipso e g parallelogrammo. & latus propterea h k, ipso e f maius: necnon & k l maius ipso f g, per ea quæ proxima annotauimus propositione, aut per lemmatis uigesimæsecundæ huius demonstrationem. Producantur itaque in rectū & continuum, f e & f g uersus m & n, per secundum postulatum: secetúrque ipsi h k æqualis f m, ipsi autem k l æqualis f n, per tertiam primi. Compleatur deinde m n parallelogrammum, per trigesimamprimam ipsius primi, unà cum r s, atque cæteris quæ in figura sunt parallelogrammis. Parallelogrammum itaque



m n, æquum est & simile ipsi h l. sed eidem h l simile ostensum est e g: simile est igitur m n, ipsi e g, per uigesimamprimā huius sexti: & proinde ipsa e g & m n parallelogramma, circa eūdem dimetientem f b o, per uigesimā sextam ipsius sexti sunt constituta. Rursum quoniam e g & r s parallelogramma, circa eundem sunt dimetiētem f b o: simile est propterea, per uigesimamquartam eiusdem sexti, r s parallelogrammum, ipsi e g, atque toti m n, & proinde ipsi d parallelogrāmo. His ita præmissis, quoniam m n æquum est ipsi h l, & ipsum h l utrisque & e g parallelogrammo & c rectilineo æquale: & m n igitur, eisdem e g parallelogrammo & c rectilineo est æquale: quæ enim inuicem æqualia, eisdem æqualia sunt, per primæ communis sentētiæ conuersionem. subducto igitur cōmuni e g: reliquum c rectilineum, reliquo gnomoni e o g, per tertiam communem sentētiā, est æquale. Et quoniam g s supplementum, ipsi e r supplemento, per quadragesimamtertiam primi est æquale: & eidem e r, æquum est a m, per trigesimamsextá eiusdem primi, nempe in æquali basi, ac in eisdem parallelis constituto. Et a m igitur ipsi g s, per primam communem sententiam æquum est. Commune adponatur e o: consurget itaque a o parallelogrammum, ipsi e o g gnomoni, per secundam communem sententiam, æquale. Sed eidem gnomoni e o g, æquum est rectilineum c: & quæ eidem æqualia, adinuicem sunt æqualia per primam communem

Discursus principalis demōstrationis.

nem sententiam. Et d o igitur parallelogrammum, æquum est ipsi dato rectilineo c: exceditque similis speciei parallelogrammum a r super totam rectam a b comparatum, ipso parallelogrammo r s, quod ipsi d simile ostensum est. Ad datã igitur rectam lineam a b, dato rectilineo c, æquale comparatum est parallelogrãmum a o, excedens similis speciei parallelogrammum a r super totam a b comparatum, parallelogrammo r s, simili dato parallelogrammo d. Quod faciendũ receperamus.

Θεώρημα ι, Πρόθεσις λ.

Τὴν τεθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Problema 10, Propositio 30.

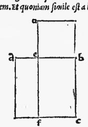
30 DAtam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem dispescere.

ORONTIVS. ¶Recta linea per extremam & mediam rationem secari dicitur: quando sic despescitur, ut tota ad unum segmentorum eandem habeat rationem, quam idem segmentum ad reliquum. Esto igitur data recta quædam linea terminata a b, quam oporteat per extremam & mediam dispescere rationem. Secetur itaque a b recta in puncto c, per undecimam secundi: ut quod sub tota a b & altero segmento a c comprehenditur rectangulum, æquũ sit ei quod ex c b reliquo segmento fit quadrato. Propositis itaque tribus rectis lineis a b, b c, & c a, quod sub extremis a b & c a continetur rectangulum, æquum erit ei quod a media b c fit quadrato. Ipsæ igitur tres rectæ lineæ proportionales erunt, per secundam partem decimæseptimæ huius sexti: sicut a b ad b c, sic b c ad c a. Data ergo recta linea a b, per extremam & mediam rationem secatur in c, & illius segmentum maius est b c. ¶Aut si uelis, describatur ex a b recta linea data, quadratum a b c, per quadragesimamsextam primi. Et ad datam rectam lineam b c, dato quadrato a b c, æquum parallelogrammum comparetur c d, excedens similis speciei parallelogrammum c e super totam b c comparatum, ipso d b parallelogrammo simili a b c dato: per antecedentem uigesimamnonam propositionem. Et quoniam simile est a b c, ipsi d b, & quadratum est a b c, & utrique cõmune c e: ablato itaque c e, reliquũ a f reliquo d b, per tertiã cõmunẽ sententiã est æquale: & qui circa e sunt ãguli, æquales sunt adinuicem, per decimãquintã primi, uel quartũ postulatũ. Aequalium porrò, & unũ uni æquale habentiũ angulũ parallelogrãmorũ: reciproca sũt latera quæ circũ æquales angulos, per decimam quartã huius sexti. Et sicut igitur e f ad e d, sic b e ad e a. Sed b e æqualis est e d, & a b ipsi b c, per quadrati diffinitionem: eidem rursũ b c, æqualis est e f, per trigesimãquartã primi. Et e f igitur, ipsi a b, per primã cõmunẽ sentẽtiã est æqualis. Aequales autẽ ad eandem eandem habent rationem, & eadem ad æquales: per septimam quinti.



Problematis interpretatio

Exequutio demonstratiua problematis.



Idem alia ratione demonstrare.

Et

Et ſicut igitur a b ad b e, ſic b e ad e a. Data igitur recta linea a b, per extremam & mediam rationē, in puncto e diſpeſcitur. Quod oportuit feciſſe.

Θεώρημα κα, Πρότασις λα.

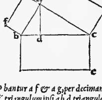
Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Theorema 21, Propoſitio 31.

In rectangulis triangulis, quæ ab rectum angulum ſubtendente latere ſpecies: æqualis eſt eis, quæ ab rectum angulum comprehendentibus lateribus ſpeciebus ſimilibus, ſimiliter que deſcriptis.

Interpretatio theorematis, cum partium figuræ deſcriptione.

ORONTIVS. ¶ *Quod de quadratis ſuperficiebus, propoſuit quadrageſimaſeptima primi: hic de quibuſcunque rectilineorum ſpeciebus, proponit Euclides. Eſto igitur datum rectangulum triangulum a b c, rectum habens angulum qui ad a. Dico quòd ſpecies rectilinei, quæ deſcribitur ex b c rectum angulum ſubtendente: æqualis eſt ambabus ſimilibus ſimulitérque deſcriptis ſpeciebus, ab ipſis a b & a c rectum angulum continētibus.*



A dato enim puncto a, ſuper datam rectam lineam b c, perpendicularis deducatur a d, per duodecimam primi: quæ per octauam huius ſexti, cadet intra datum a b c triangulum, ipſúmque in bina diuidet triangula a b d & a d c, toti a b c atque adinuicem ſimilia. Deſcribatur inſuper ex b c, contingens & cuiuſcunque libuerit ſpeciei rectilineum b e: & à datis rectis lineis a b & a c, dato rectilineo b e, ſimilia ſimilitérque poſita rectilinea deſcribantur a f & a g, per decimamoctauam huius ſexti. Et quoniam ſimile eſt a b c triangulum ipſi a b d triangulo, & qui ad b angulus utrique communis: eſt igitur ut c b ad b a, ſic a b ad b d: ſunt itaque b c & a b, ſimilis rationis latera. Similia porrò triangula, adinuicem in dupla ratione ſunt ſimilis rationis laterum per decimamnonam eiuſdem ſexti. Triangulum igitur a b c, ad triāgulum a b d, duplam rationem habet, quam b c latus ad latus a b. Rurſum quoniam b e rectilineum, ſimile eſt ipſi a f: ſimiles autem rectilineæ figuræ, in dupla ratione ſūt adinuicem ſimilis rationis laterum, per primum corollarium uigeſimæ huius ſexti. Et b e itaque rectilineum, duplam rationem habet, quam latus b c ad ſimilis rationis latus a b. Oſtenſum eſt autem, quòd & triangulum a b c ad triangulum a b d, duplam itidem rationem habet quā latus b c ad latus a b. Et ſicut igitur a b c triangulum ad triangulum a b d, ſic per undecimam quinti, b e rectilineum ad rectilineum a f: & à conuerſa inſuper ratione, ſicut a b d triangulum ad triangulum a b c: ſic a f rectilineum, ad rectilineū b e, per quartæ ipſius quinti corollarium. Haud diſſimiliter oſtendemus triangulum a b c ad triangulū

Demōſtratio ipſius theorematis.

gulũ a d e,atq; b e rectilineũ ad rectilineũ a g, duplicẽ itidẽ habere rationem, quã latus b c ad similis rõnis latus a c.Et õinde fore sicut a b c triangulũ, ad triangulũ a d c:sic b e rectilineũ, ad rectilineũ a g.Et econtra rursũ,sicut triãgulũ a d c,ad triangulũ a b c:sic a g rectilineum,ad rectilineum b e.Patuit autem,quòd sicut a b d triangulum ad triangulum a b c,sic a f rectilineum ad rectilineum b e.Primum igitur a b d,ad secundum a b c eandem habet rationem, & tertium a f ad quartum b e:habet rursum & quintum a d c ad secundum a b c eandem rationem, & sextum a g ad ipsum quartum b e. Et composita igitur primum & quintum a b d & a d c,ad secundum a b c eandem habebũt rationem,& tertium a f cum sexto a g ad ipsum quartum b e:per uigesimãquartam ipsius quinti.Sed a b d & a d c triangula,æqualia sunt ipsi a b c triangulo,tanquam partes ipsum totum a b c triangulum integrantes:& ipsa igitur a f & a g rectilinea ipsi b e rectilineo sunt æqualia. Aequum est ergo rectilineum quod ex b e,eis quæ ex a b & a c similibus similitérque descriptis. ¶Idem etiã oſtẽdere licebit,ex secundo corollario eiusdem uigesimæ huius sexti: coassumptis propter similitudinem triangulorum a b c,a b d,& a d c,tribus rectis lineis b c a b,& b d proportionalibus:& alijs tribus itidem proportionalibus, b c, a c, & c d. Erit enim per idem corollarium,sicut b c ad b d,sic b e ad a f:sicutq; eadem b c ad c d,sic b e ad a g. Hinc ipsarum trium linearum b c,b d,& d c, quemadmodum & supradictorum triangulorum adminiculo, conclusionem haud dissimili poteris elicere discursu. In rectangulis igitur triangulis,quæ,ad rectum angulum subtendente latere species. &c.ut in t. extremate. Quod ostendendum fuerat.

Idem alia ratione demõstrare.

Θεώρημα κβ, Πρότασις λβ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι: αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ, ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Theorema 22, Propositio 32.

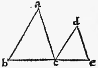
32 SI duo triangula componantur ad vnum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia,vt sint eiusdem rationis eorum latera & parallela:reliqua ipsorum triangulorum latera,in rectam lineam erunt.

ORONTIVS. ¶Sint bina triangula a b c & d c e,ad unum angulum qui sub a c d composita,habentia duo latera b a & a c duobus lateribus c d & d e proportionalia,sicut b a ad a c ita c d ad d e:sintque eiusdem rationis latera inuicem parallela,utpote a b ipsi c d,& a c ipsi d e. Dico quòd reliqua latera b c & c e,in rectam lineam sunt constituta. Cùm enim ex hypothesi a b & c d sint parallelæ,& in eas incidat a c:erit angulus b a c, æqualis alterno a c d, per uigesimamnonam primi. Haud dissimiliter quoniam a c parallela est ipsi d e,& in eas incidit recta c d: erit per eandem uigesimamnonam primi,angulus c d e,alterno a c d itidem æqualis. Duo itaq; anguli b a c & c d e eidem angulo

Oſtensio theorematis.

De angulis qui ad centrum.

a c d sunt æquales: & proinde æquales adinuicem, per primam communem sententiam. Bina itaque triangula *a b c & d c e, habent unum angulum uni angulo æqualem, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: æquiangula ergo sunt ipsa a b c & d c e triangula, & æquales habent angulos sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur, per sextam huius sexti.* Aequus est itaque angulus *c b a, angulo d c e.* Ostensum est autem, quòd & *b a c angulus, æquus est angulo a c d.* Duo igitur anguli *a c d & d c e, duobus angulis b a c & c b a sunt æquales.* Totus rursum qui sub *a c e continetur angulus, eisdem angulis, a c d & d c e æqualis est.*



Et proinde angulus *a c e, duobus angulis b a c & c b a est æqualis.* Communis addatur angulus *a c b: duo igitur anguli a c b & a c e, tribus angulis b a c, a c b, & c b a, ipsius a b c trianguli, sunt per secundam communem sententiam æquales.* sed eisdem tribus angulis ipsius *a b c triãguli, sunt æquales duo recti, per trigesimamsecundam primi.* Et duo itaque *anguli a c b & a c e, duobus rectis per primam communem sententiam coæquantur.* Ad datam ergo *rectam lineam a e, atque ad eius punctum c, duæ rectæ lineæ b c & c e non ad easdem partes ductæ, efficiunt utrobique angulos a c b & a c e binis rectis æquales: ipsæ igitur rectæ lineæ b c & c e in directum seu rectam lineam, per decimamquartam ipsius primi sunt constitutæ.* Ergo *si bina triangula: & quæ sequuntur reliqua.* Quod *oportuit demonstrasse.*

Θεώρημα κγ, Πρόθεσις λγ.

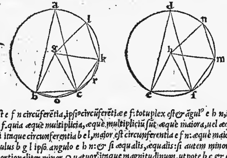
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Theorema 23, Propositio 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandẽ habẽt rationẽ ipsis circũferẽtijs in quibus deducũtur: & si ad centra, & si ad circũferẽtias fuerit deducti. tũ etiã sectores, tãquã ad cẽtra cõstituti. 33

ORONTIVS. ¶ *Sint bini & adinuicem æquales circuli, a b c & d e f: ad quorũ centra, g & h, anguli deducãtur b g c & e h f, ad circũferentias autẽ, b a c & e d f, circũferentias b c & e f cõprehendẽtes.* Aio primũ quòd *ueluti circunferẽtia b c, ad e f circũferentiã, sic angulus b g c ad angulũ e h f: necnon & angulus b a c, ad angulũ e d f.* Cõnectantur enĩ per primũ postulatũ *b c & e f. & in datis circulis a b c & d e f, datis rectis lineis b c & e f, nõ maioribus eorũdẽ circulorũ dimetiẽtibus: quotcũq; æquales rectæ lineæ ordine coaptẽtur, c k & k l ipsi b c, atque f m & m n ipsi e f æquales, per primam quarti. & per primũ postulatũ, cõnectãtur g k, g l, h m, & h n rectæ lineæ.* Et quoniam *æquales sunt b c, c k, & k l, rectæ lineæ: æquales sunt & circumferentiæ b c, c k, & k l easdem rectas inuicẽ æquales subtendentes, per uigesimamoctauam tertij.* Hinc *per uigesimam*

uigesimam septimam eiusdem tertij, anguli b g c, c g k, & k g l, æquales sunt adinuicē. Et proinde anguli e h f, f h m, & m h n, adiuuicem pariter æquales.



Quotuplex igitur est b c l circunferentia, ipsius circunferētiæ b c: totuplex est angulus b g l ipsius āguli b g c. quotuplex insuper est e f n circūferētia, ipsius circūferētiæ e f: totuplex est & āgulus e h n, ipsius āguli e h f. quia æquè multiplicia, æquè multipliciū sūt æquè maiora, uel æquè minora. Si itaque circunferentia b e l, maior est circunferentia e f n: æquè maior est & āgulus b g l ipso angulo e h n: & si æqualis, æqualis: si autem minor, itidē proportionaliter minor. Quatuor itaque magnitudinum, ut pote b c & e f circunferentiarum, & angulorum b g c & e h f, sumpta sunt æquè multiplicia primæ & tertiæ: nec non secundæ & quartæ alia utcunque æquè multiplicia: & sicut multiplex primæ, ad multiplex secundæ: sic multiplex tertiæ, ad multiplex quartæ se habere deductum est. In eadem ratione igitur est prima ad secūdam: & tertia ad quartam, per sextam ipsius quinti diffinitionem: hoc est, sicut b c circunferentia, ad e f circunferentiam: sic angulus b g c, ad angulum e h f.

Circunferentiæ		Anguli	
b c l.	e f n.	b g l.	e h n.
b c.	e f.	b g c.	e h f.

Et quoniam angulus b g c, duplus est anguli b a c: & e h f, ipsius e d f itidem duplus, per uigesimā tertij. Sunt itaque b g c & e h f anguli ipsorū b a c & e d f qui ad circunferentias sunt angulorum æquè multiplices. Partes autem eodem modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem: per decimam quintam eiusdem quinti. Quam rationē igitur habet angulus b g c, ad angulum e h f: eam habet & angulus b a c, ad angulum e d f. Ostensum est autem, quòd angulus b g c ad angulū e h f eam habet rationem: quàm b c circunferentia, ad circunferentiam e f. Et b a c igitur angulus ad angulum e d f eam habet rationem, per undecimam quinti: quam b c circunferētia, ad circunferentiam e f.

De angulis qui ad circunferentiam.

b c. e f	b g c. e h f	b a c. e d f

Dico insuper, quòd sicut eadem circunferentia b c, ad circunferentiam e f: sic g b c sector, ad sectorem h e f. Coassumantur enim in b c & c k circunferentijs, contingentia signa o & r: & connectātur b o, o c, c r, & r k lineæ rectæ, per primū postulatum. Et quoniā triāguli g b c duo latera b g et g c, sūt æqualia duobus c g et g k triāguli c g k, per quīdecimā diffinitionē primi, et æquos adinuicē cōtinēt angulos, basis quoque b c basi c k est æqualis: totū itaque triāgulū g b c, toti triāgulo c g k, per quartā ipsius primi est æquale.

De sectorib⁹

 Rursum

Rursum quoniam b c circunferentia, æqualis est circunferentiæ c k: si à tota a b c circunferentia, eædem æquales auferantur circunferentiæ, reliqua b a c reliquæ c a k, per tertiam communem sententiam, est æqualis. Et proinde anguli b o c & c r k æquales sunt adinuicem, per uigesimamseptimam tertij. Similis est igitur sectio b o c, sectioni c r k, per decimam ipsius tertij diffinitionem: & in æqualibus rectis lineis b c & c k constitutæ sunt. Aequalis est igitur sectio b o c, sectioni c r k, per uigesimamquartam eiusdem tertij. Et quoniam æquum est triangulum g b c, triangulo c g k: totus propterea sector g b c, toti c g k sectori, per secundam communem sententiam est æqualis. Et proinde sector g k l, utrique ipsorum g b c, & c g k conuincitur æqualis. Tres itaque sectores g b c, c g k & g k l, sunt æquales adinuicem. Haud dissimiliter, sectores h e f, f h m, & h m n, inuicem æquales fore concludentur. Quotuplex est igitur circunferētia b c l, ipsius b c circunferentiæ: totuplex est g b l sector, ipsius sectoris g b c. Et proinde quotuplex est circunferentia e f n, ipsius e f circunferentiæ: totuplex est & sector h e n, ipsius sectoris h e f. Ergo si b c l circunferentia, maior est ipsa e f n: æquè maior est & sector g b l, ipsius sectoris h e n: & si æqualis, æqualis: & si minor, itidem proportionaliter minor. Quatuor itaque magnitudinū, duarū inquàm circunferētiarū b c & e f, & duorum sectorum g b c & h e f, sumpta sunt æquè multiplicia primæ & tertiæ, necnon secundæ & quartæ alia utcunque æquè multiplicia: & ut

Circunferentiæ.		Sectores.	
b c l.	e f n.	g b l.	h e n.
b c	e f.	g b c.	h e f.

multiplex primæ ad multiplex secundæ, sic multiplex tertiæ ad multiplex quartæ se habere deductum est. Prima igitur ad secundam, eandem habet rationem, & tertia ad quartam, per sextam diffinitionem quinti. Sicut igitur circunferentia b c ad circunferentiam e f: sic g b c sector, ad sectorem h e f. In æqualibus igitur circulis, anguli eandem habent rationem ipsis circunferentijs in quibus deducuntur: & si ad centra, & si ad circunferentias fuerint deducti. Tum etiam sectores, tanquam ad centra cōstituti. Quod tandem receperamus ostendendum.

¶Corollarium.

¶Et proinde manifestum est, quòd ueluti sector ad sectorem, sic per undecimam quinti angulus ad angulum: utrobique enim ratio offenditur, quæ circunferentiæ ad circunferentiam.

SEXTI LIBRI GEOMETRICORVM Elementorum Euclidis Megarensis, Ex Orontij Finæi Delphinatis, Regij Mathematicarum Lutetiæ professoris, recēns aucta & emendata traditione,

FINIS.

INDEX OPERVM AB ORONtio Finæo Delphinate, Regio Mathematicarum Lutetiæ professore, ab hinc annis XXX (quibus easdem Mathematicas Lutetiæ publicè docere, ac instaurare non cessauit) successiuè conscriptorum.

In primis quæ iam ædita & impressa sunt.

1. De Arithmetica practica, Libri quatuor, ijs qui ad Mathematicam adspirant Philosophiam perutiles ac necessarij: ter iam æditi.
2. De Geometria practica, Libri duo: vbi de rectis in circulo subtensis: & de longitudinum, planorum, & solidorum dimēsionibus.
3. De Mundi Sphæra, siue Cosmographia, primáue Astronomiæ parte, Libri quinque, proprijs eiusdem Orontij commentarijs elucidati: bis iam æditi, & absque commenrarijs semel.
4. De quadrantibus & solaribus horologijs, Libri quatuor: in quibus præter emendatas aliorum inuentiones, plurima suo excogitauit ingenio, & hydraulicum inter cætera horologium, æqualia describens horarum interualla.
5. De sinibus, hoc est, rectis in circuli quadrāte subtēsis, Libri duo: vnà cum eorundem sinuum tabula, per ipsum Orontiū fideliter admodùm supputata: quorum extat æditio secunda seorsum impressa.
6. Organum sinuum: quo tū geometrici, tum astronomici canones, ex quatuor sinuum proportione pēdentes, certa ratione, ac inaudita facilitate tractantur: cuius æditio secunda recēs seorsum impressa est.
7. Commentaria, siue demonstrationes in sex priores libros elemētorum Geometricorum Euclidis: quorum hæc est æditio tertia.
8. Quadrans vniuersalis astrolabicus, omnibus Europæ regionibus inseruiens, eiusdem (& amplioris) cum ipso Astrolabio siue Planisphærio commoditatis: bis iam æditus.
9. Aequatorium planetarum, sub quadrangula & altera parte longiori forma comprehensum, bis itidem æditum
10. Theoricæ planetarum gallicè conscriptæ, & elegantissimis figuris ornatæ: vnà cum Armillis & Merheoroscopio Ptole.
11. Almanach coniunctionum & oppositionum Luminarium, cum ijs quæ ad ecclesiasticum computum spectare videntur, xxxv annis inseruiens.
12. Aliud item Almanach vniuersale magis, vtilissimis refertum cōmoditatibus, gallicè & latinè æditum, pluribus annis duraturū.
13. Chorographia Galliarum, seu Charta Gallicana sæpius impressa.

14. Descriptio vniuersi orbis, sub gemina cordis humani figura, & vnico papyri folio comprehensa.
15. Eiusdē Orbis amplior designatio, in vnicam humani cordis effigiem dudum coextensa, sæpiúsque impressa.
16. Chorographia terrarum, ad sacræ scripturæ intelligentiam necessariarum, quam vocant diui Pauli peregrinationem.
17. ¶ De Circuli quadratura, Liber vnus: vbi de area seu dimensione ipsius circuli, & ratione circunferentiæ ad diametrum.
18. De multangularum omnium & regularium figurarū descriptione, tam intra quàm extra circulum, ac super quauis data linea recta.
19. De inuenienda longitudinis locorum differētia, aliter quàm per Lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodùm singularis.
20. Planisphærium geographicum: quo tum longitudinis atque latitudinis differentiæ, tum directæ locorum deprehenduntur elõgationes.

¶ *Recèns ædita, anno scilicet 1551.*

21. Sphæra Mundi siue Cosmographia quinque libris recèns auctis & emendatis absoluta, & tam latinè quàm gallicè conscripta suísque figuris elegantissimis & tabulis illustrata.
22. In præfatos libros de Mundi Sphæra, & planetarum theoricas canonum astronomicorum, atque geographicorum, Libri duo.
23. De speculo vstorio ignem ad propositam distantiam generante, Liber vnus.
24. Canones in vulgatas ephemerides, gallicè, sed mira facilitate cõscripti.

¶ *Quæ absoluta, sed nondum ædita sunt.*

1. Theoricæ motuum cælestium in suam harmoniam redactæ, peropportunísque tum figuris elegantissimis, tum scholijs & demonstrationibus recèns illustratæ.
2. Liber de componendis artificialibus rheoricis, tam peculiaribus quàm generali instrumento comprehensis: quibus vera planetarum loca, vel facilè deprehenduntur.
3. De ratione partium vsúsque Astrolabij siue Planisphærij, libri tres: gallicè & latinè conscripti, & propediem ædendi: vnà cum ipso instrumento, noua & eleganti vsúsque paratissima descriptione fabricato, ac geographicis canonibus per eundem Orontium recèns adinuentis illustrato.
4. Lilium astronomicum, vniuersam motuum cælestium & theoricam & praxin breui admodúmque subtili complectẽs artificio: opus planè diuinum.

Directoriũ

5. Directorium planetarum, tum circa limbũ Astrolabij, tum seorsũ mirabili ratione contextum: ijs qui iudiciariam exercent Astrologiam perutile valdéque necessarium.
6. Nouæ aliquot quadrantum, & horariorum annulorum descriptiones, ab eodem Orontio recens excogitatæ: quæ cum prius æditis horologijs propediem in lucem emittentur.
7. ¶ Galliarum Chorographia noua, ad iustam locorum positionem summa diligentia aucta, emendata, & depicta.
8. Topographia Delphinatus, Prouinciæ, Sabaudiæ, & patriæ Pedemontanæ, ad viuum quantum fieri potuit figurata.
9. Noua Orbis descriptio recens adinuenta geminis constans hemisphærijs, ex fidelioribus terrarum obseruationibus deprompta.
10. De geometria practica libri tres, in quibus de linearũ, planorum, solidorum dimensione, inaudita eruditione, tam gallicè quàm latinè tractatur.
11. In arithmetica Euclidis elementa, septimo octauo & nono suorũ elementorum libris comprehensa demonstrationes.
12. In decimum, & reliquos libros eiusdem Euclidis demonstrationes dudum conscriptæ: quæ tandem in lucem edentur.
13. De rebus mathematicis hactenus desideratis, libri quatuor: opus hactenus inauditum, & mira subtilitate refertum.

¶ Molitur nunc & alia quàm plurima, tum circa reliquos Euclidis libros, tum in magnam Ptolomæi constructionem, quam vocant Almagestum, atque cælestium motuum tabulas quæ per inclementiam temporum, & domesticorum negociorum vrgentem multitudinem, in sua cogitur differre tempora.
Adde quòd non pauca ex alienis emendauit, ac in lucem emisit, & tum scholijs & appendicibus, tum figuris pro singulorum exigentia decorauit. Quæ cùm longum esset recensere, data prætermittimus opera.

P. Seder[illegible]